This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

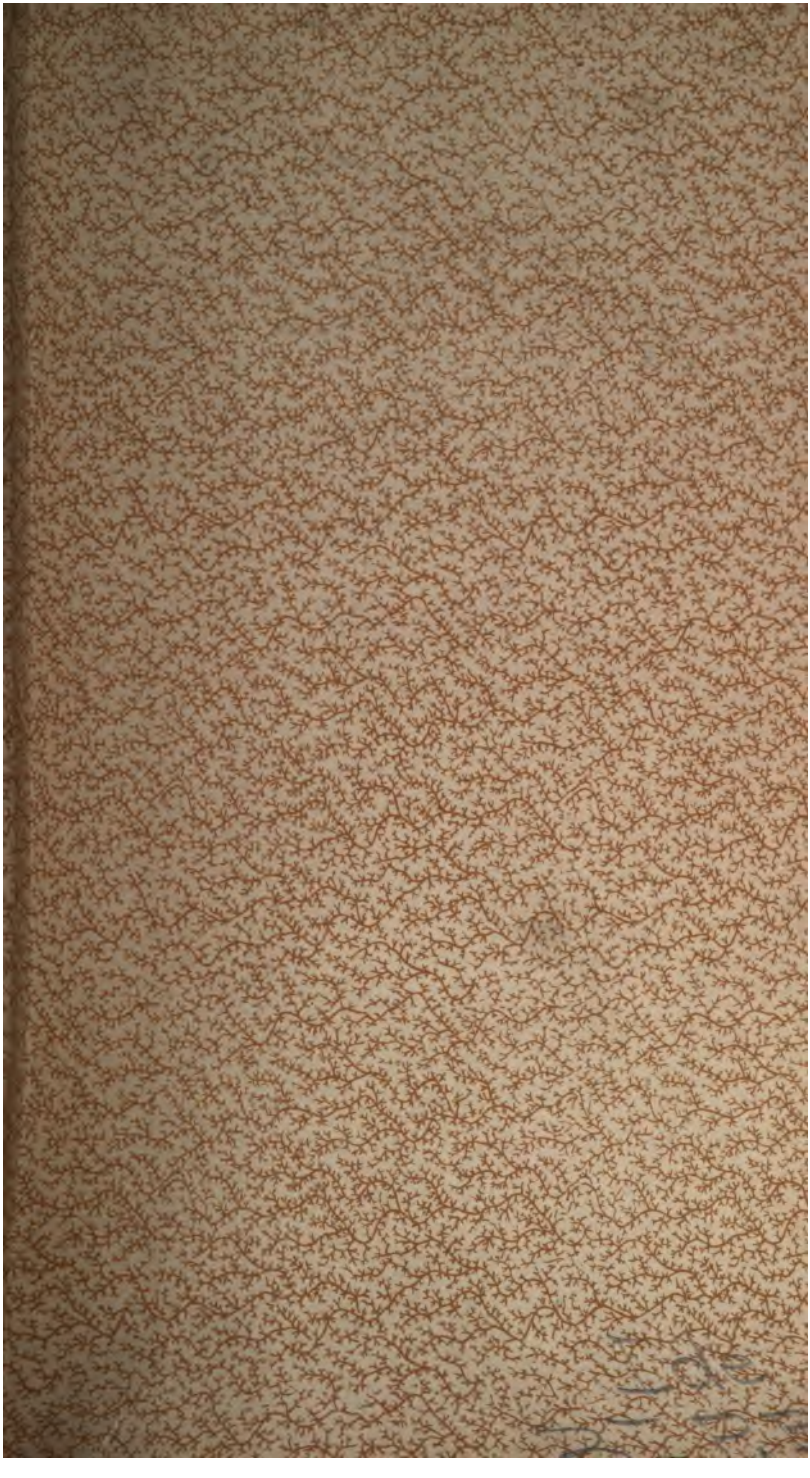
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06644398 1



1. Mechanics, 1802

SnD

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Die

Statik,

oder die

Lehre vom Gleichgewichte fester Körper.

Erſter Theil.

ПЕРЕВЕЛ
БИБЛИС
МЕЛАДЖ

Vorrede.

Die Mechanik verdient mit gleichem Rechte einen Platz in dem Gebiete der reinen Größenlehre, als man die Geometrie dahin zu rechnen gewohnt ist. Sie hat, wie diese, ihre eigenthümlichen Grundsätze, von denen kein einziger aus der trüben Quelle der Erfahrung geschöpft werden darf: so wenig, als man es sich je wird einfallen lassen, den eilften Grundsatz Euklids empirisch darthun zu wollen. Ihre Begriffe

von Kraft und Bewegung ſind eben der Evidenz fähig, als Raum und Ausdehnung, und das mechaniſche Bild vom feſten Körper ſteht in Hinſicht auf Abſtraktion und Beſtimmtheit dem Körper des Geometers vollkommen zur Seite.

Dies alles haben unſere weſtlichen Nachbaren, die überhaupt einen feinern Sinn für ſchickliche Behandlung verrathen, ſchon längſt gefühlt, und daher die Mechanik mit weit mehr Methode bearbeitet, als wir Deutſchen zu thun pflegen. Sie ſtellen die Sätze derſelben in ächter Reinheit dar, laſſen ſie genau in der ſyſtematiſchen Ordnung folgen, wie einer den andern herbeyführt, und geben ihnen ſämmtlich die Allgemeinheit, deren ſie nur immer fähig ſind. In unſern deutſchen Lehrbüchern der Mechanik iſt man dagegen gleich beym Anfange gar zu ängſtlich darauf bedacht, alles in das Gewand von Nutzanwendung einzuzwängen, wird dadurch genöthigt, den Zuſchnitt zu kärglich zu machen, und verſchließt ſich

und erheben ſie, ſowohl für den Unterricht, als beym Selbſtſtudium, weit über den bloß theoretiſchen Vortrag, ſobald man dabey die Vorſicht gebraucht, unter der großen Zahl von Anwendungen die inſtruktivſten auszuwählen, ſie ſo kurz abzufaſſen, als es die Umſtände erlauben wollen, und alles ſorgfältig zu vermeiden, was zu weit ins Detail führen könnte. Es hält in der That ſchwer, dieſen Mittelweg, wie ich ihn bey Bearbeitung des vorliegenden Werkes mir vorgezeichnet habe, bis ans Ende mit gleicher Strenge und Beharrlichkeit zu verfolgen, und ich mag nicht entſcheiden, ob nicht vielleicht ſubjektive Vorliebe für manchen beſondern Gegenſtand, vorzüglich ſolchen, wobey ich mir ſelbſt überlaſſen war, mich zuweilen unvorſätzlich davon entfernt hat.

So viel von dem, was die Behandlung betrift. In Anſehung der Materien ſelbſt habe ich noch einige Bemerkungen beyzufü-

gen, wozu sich im Buche mir keine passende Gelegenheit darbot.

Die Verlegung der Kräfte auf beliebige Punkte ihrer Richtungen ist eine Eigenschaft des Gleichgewichts, die wegen ihrer zu großen Einfachheit selten beachtet, und in den meisten Systemen als unbedeutend übergangen wird. Gleichwohl beruhen doch auf ihr die beyden wichtigsten Sätze der Statik; die Zusammensetzung der Kräfte, und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten; und von so manchen Aufgaben wird durch Zuziehung derselben die Auflösung beträchtlich abgekürzt, wovon ich nur hin und wieder einzelne Beyspiele gegeben habe. Dahin gehören: der schiefe Zug am Hebel §. 57., der krummlinigte Hebel §. 59., das Rad §. 97., und besonders im zweyten Theile: der Widerstand der Luft bey drehender Bewegung §. 269., wo der Vortheil, den sie gewähret, höchst auffallend ist.

Mehrere Anwendungen derſelben zeigt Friſi in ſeiner Mechanik, *) der von ihr bey den ſchwerſten Unterſuchungen mit glücklichem Erfolge häufigen Gebrauch gemacht hat.

Die Lehre von der Vertheilung des Drucks, den Körper auf darunter liegende Punkte und Flächen ausüben, habe ich in einem eigenen Kapitel abgehandelt, weil ſie der Theorie rechtmäßig angehört, und wegen ihrer vielfachen Anwendung auf Fälle des gemeinen Lebens von großer Wichtigkeit iſt. Sie ſcheint bey den jetzigen Mechanikern wieder in Vergeſſenheit zu kommen, oder doch wenigſtens, ſeitdem Delanges ſie aufs Neue durch vergebliche Unterſuchungen in Anregung brachte, aus dem Bezirke der ſicheren Wahrheiten verbannt zu ſeyn. Dies Schickſal verdient ſie aber auf keine Weiſe, und ich habe mich um

*) Friſii Op. math. P. II.

sten Schritt hierzu that Fossombroni *); erreichte aber doch bey weitem nicht, was nach ihm Laplace mit weit geringerem Aufwande von Kalkul geleistet hat **). Ich habe seinen Beweis, so weit er die festen Körper betrifft, umständlich entwickelt, und zugleich den Gebrauch des Satzes in einzelnen Fällen zu zeigen gesucht.

Aus dem zweyten Theile will ich hier nur die beyden Hauptpunkte: d'Alemberts Princip, oder die Zurückführung der Bewegungsgesetze auf das Gleichgewicht, und die Umdrehung der Körper um freye Axen, ausheben.

Was ersteres betrift, so scheint dies noch zur Zeit sich nicht weit über Frankreichs Grenzen hinaus verbreitet zu haben. Weder Kästner, Karsten, noch sonst ein Deutscher Schriftsteller gedenken seiner auch nur mit einer Sylb-

*) Sul' princip. delle velocità virtuali.

**) Traité de mecanique céleste Tom. I. Liv. I.

aber doch dabey Eulers allgemeine Theorie nicht benutzt hat.

Den Beschluß der Statik macht das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, dem ich nach reiferer Ueberlegung keine schicklichere Stelle, als diese, anzuweisen hatte. Es setzt nemlich offenbar zu viele Kenntnisse voraus, als daß man es unter den ersten Sätzen der Statik gleich Anfangs mit Nutzen aufstellen könnte, und wenn man in einem Lehrbuche sogar das ganze System darauf gründen wollte, so wäre dies Verfahren gewiß eben so zweckwidrig, als die Demonstration der Elementarsätze der Geometrie durch Hülfe des Infinitesimal Kalkuls. Seine Wichtigkeit bey höheren Untersuchungen zeigte zuerst Lagrange in seiner Mechanik, und erregte dadurch das allgemeine Verlangen nach einem gründlichen Beweise desselben. Den er-

ſten Schritt hierzu that Foſſombroni *); erreichte aber doch bey weitem nicht, was nach ihm Laplace mit weit geringerem Aufwande von Kalkul geleiſtet hat **). Ich habe ſeinen Beweis, ſo weit er die feſten Körper betrifft, umſtändlich entwickelt, und zugleich den Gebrauch des Satzes in einzelnen Fällen zu zeigen geſucht.

Aus dem zweyten Theile will ich hier nur die beyden Hauptpunkte: d'Alemberts Princip, oder die Zurückführung der Bewegungsgeſetze auf das Gleichgewicht, und die Umdrehung der Körper um freye Axen, ausheben.

Was erſteres betrift, ſo ſcheint dies noch zur Zeit ſich nicht weit über Frankreichs Grenzen hinaus verbreitet zu haben. Weder Käſtner, Karſten, noch ſonſt ein Deutſcher Schriftſteller gedenken ſeiner auch nur mit einer Sylb-

*) Sul princip. delle velocità virtuali.

**) Traité de mecanique céleſte Tom. I. Liv. I.

he, und selbst Euler, der an der Erweiterung der Mechanik so thätigen Antheil nahm, fing erst bey seinen späteren Abhandlungen an, davon Gebrauch zu machen. Da ich diesen wichtigen Grundsatz beym jetzigen Zustande der Mechanik für ganz unentbehrlich halte, so habe ich vom fünften Kapitel an alles Nachfolgende darauf gegründet; stelle ihn aber unter der Form dar, die Euler ihm gegeben hat, und die mir natürlicher zu seyn scheint, als die ursprüngliche d'Alembertische; wodurch ich zu seiner Aufnahme einiges beyzutragen hoffe.

Eine einfache Ableitung aus ihm ist die Theorie des Beharrungszustandes (S. 128.), wovon man sich ohne seine Hülfe durchaus keine richtige Einsicht verschaffen kann. Auf diese Lehre habe ich das folgende Kapitel von den Arbeiten der Menschen und Thiere gebauet, und die längst adoptirte Formel (§. 133) der Empirie abgewonnen. Da die Untersuchungen

Borelli's, Parent's und Lambert's über eben den Gegenstand zu keinen Resultaten führen, und auch zum Theil auf Voraussetzungen beruhen, denen ich auf keine Weise beypflichten kann: so wird man es mir verzeihen, daß ich ihrer im Buche keine Erwähnung gethan habe.

Die Gesetze der Umdrehungen fester Körper um Axen lassen sich ebenfalls auf das Gleichgewicht zurückführen, wie ich §. 199. 240 u. f. gezeigt habe. Indeß wird doch dies Verfahren bey beweglichen Axen, wiewol es auch da noch vor allen sonst bekannten den Vorzug verdient, etwas komplicirt, und läßt sich des vielen Kalkuls wegen, der dabey unvermeidlich ist, nicht wohl in ein Lehrbuch aufnehmen. *) Das veranlaßte mich, einen ganz neuen Weg zu betreten, und von dem Grundsatze auszugehen, daß sich die Winkel-

*) S. Eulers Theoria motus corp. rigid. Cap. XV.

geſchwindigkeiten, wie die geradlinigten, zuſammenſetzen und zerlegen laſſen. Dieſe ungemein ſchöne Erfindung, die ſich aus Italien herſchreibt, macht die drehende Bewegung zu gleicher Behandlung fähig, als die fortrückende, und leitete mich auf die einfachſte Art zu allen den wichtigen Sätzen, zu denen Euler durch das vorhin gedachte Verfahren gelangt iſt.

Göttingen im Juni 1802.

J. J. A. Ide.

Inhalt

Inhalt
des erſten Theils.

Erſtes Kapitel. Allgemeine Betrachtung der Kräfte im Zuſtande des Gleichgewichts.

Kraft und Richtung derſelben . . . . §. 1.
Gleiche und entgegengeſetzte Kräfte heben einander auf . . . . . — 2.
Gleichgewicht . . . . . — 4.
Vereinigung, Trennung, Vergleichung der Kräfte — 6.
Druck; Widerſtand . . . . . — 8.
Unänderung des Gleichgewichts ohne Störung deſſelben . . . . . — 10.
Gleichgewicht dreyer Kräfte an der unbiegſamen Linie . . . . . — 12.
Vertheilung einer Laſt auf zwey Punkte — 17.
Der Hebel . . . . . — 20.
Aequipollente Kräfte . . . . . — 25.

Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Hebel . §. 27.
— — an der unbiegsamen Linie überhaupt — 30.
Physischer Hebel . . . . . — 34.
Der Winkelhebel . . . . . — 42.

Zweytes Kapitel. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

Verlegung der Kraft auf beliebige Punkte ihrer Richtung . . . . . — 45.
Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts dreyer auf einen Punkt wirkender Kräfte . . — 47.
Bestimmung der mittlern Kraft . . — 49.
Zerlegung der Kräfte . . . . . — 54.
Bestimmung des wirksamen Theils einer Kraft — 56.
Schiefer Zug am Hebel, und krummlinigter Hebel . . . . . — 57.
Zusammenwirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt . . . . . — 60.
Gleichgewicht der Kräfte an einer festen Axe — 64.
Druck, den die Axe leidet
— von senkrechten Kräften . . . — 69.
— — solchen, die der Axe parallel sind — 71.

Drittes Kapitel. Vom Schwerpunkte fester Körper.

Fester Körper im mechanischen Betracht. . — 73.
Allgemeine Bestimmung des Schwerpunkts nach dreyen Koordinaten . . . . . — 73.
Schwerpunkt homogener Körper . . — 83.
Die Wage . . . . . — 98.

Stabilität des Körpers auf horizontalem Boden . . . . . §. 109.
Gleichgewicht auf der schiefen Fläche . — 116.
Stabilität eines Körpers auf derselben . — 119.
Das Wälzen runder Körper . . . — 123.
Anzuwendende Kraft um Räder über hervorragende Hindernisse zu ziehen . . . — 125.
Vom Drucke der Dächer . . . . — 128.
Sperrung derselben . . . . . — 132.
Gebrochene Dächer . . . . . — 136.

Viertes Kapitel. Von der Vertheilung des Drucks auf mehrere Punkte und zusammenhängende Flächen.

Vertheilung desselben auf drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen . . . . — 140.
Unzulänglichkeit der bisherigen Theorie, wenn sie in eine gerade Linie fallen . . — 142.
Grundsatz der möglichst gleichförmigen Vertheilung . . . . . — 144.
Eulers Theorie . . . . . — 145.
Einheit des Drucks . . . . . — 153.

Fünftes Kapitel. Von der Spannung biegsamer Fäden.

Spannung . . . . . — 160.
Gleichgewicht dreyer Kräfte am Faden . — 162
Wirkung der Zugseile beym Zuge der Thiere — 163.
Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Faden . — 165.

Krümmung einer Fadens, der einer kontinuirlichen Reihe von Kräften ausgesetzt ist . §. 169.
Die Rolle . . . . . — 173.
Die Schleife, oder der bewegliche Knoten . — 175.
Der Rollenzug . . . . . — 178.
Der Flaschenzug . . . . . — 183.
Krümmung des Fadens durch sein eigenes Gewicht; Kettenlinie . . . . . — 189.

Sechstes Kapitel. Vom Räderwerke.

Das Rad an der Welle . . . . — 193.
Verschiedene Formen desselben . . . — 195.
Zusammengesetzte Winde . . . . — 204.
Gezähntes Rad . . . . . — 208.
Form der Radzähne . . . . . — 213.
Reibstämpfer . . . . . — 230.
Eingreifen der Trieblinge. . . . — 233.

Siebentes Kapitel. Von der Schraube.

Die Schraubenlinie . . . . . — 236.
Die äußere Schraube . . . . . — 239.
Die innere oder Schraubenmutter . . — 241.
Arten der verbundenen Schraube,
wenn bloß die äußere beweglich ist . — 243.
wenn bloß die innere beweglich ist, die Presse — 245.
wenn beyde beweglich sind, die Schraube an der Axe . . . . . — 246.
Die Schraube ohne Ende . . . . . — 248.
Zusammengesetzte Schrauben . . . — 251.

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen der Kräfte im Zuſtande des Gleichgewichtes.

§. 1.

Unter **Kraft** verſteht man im Allgemeinen jedes Beſtreben, Bewegung hervorzubringen, es ſey nun, daß Umſtände ſie zulaſſen, oder verhindern. Die gerade Linie, nach welcher eine Kraft den Körper, auf den ſie wirkt, forttreibt, heißt ihre **Richtung**.

So iſt das Fallen der Körper die Wirkung einer Kraft, die man die Schwere nennt, und deren Richtung vertikal niederwärts, oder nach einer auf den ebenen Boden ſenkrechten Linie geht. Ein Körper, der am Fallen gehindert wird, zeigt noch das Beſtreben zu ſinken durch ſein Gewicht, das nach Verhältniß ſeiner Maſſe, oder der größern und geringern Menge materieller Theile, die er in ſich enthält, verſchieden iſt. So wie nemlich die Maſſe eines Körpers durch Anhäufung fremder Theile zunimmt, vermehrt ſich ſein Gewicht; mehrere Körper, die man zugleich tragen will, erfordern die Vereinigung aller der Kräfte, die zu jedem,

Friktion bey der Wage . . . . . §. 334.
— bey ſtehender Welle . . . . — 336.
— beym Räderwerke . . . . . — 338.
— der wälzenden Bewegung . . — 341.
Friktions-Kugeln . . . . . — 349.
Friktions-Räder . . . . . — 350.

Eilftes Kapitel. Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Gleichgewicht mehrerer auf einen Punkt wirkender Kräfte . . . . . — 353.
— am feſten Körper . . . . — 355.
— an einem Syſteme, deſſen Punkte zum Theil in keiner Verbindung ſtehen . — 359.
— deſſen Punkte theils durch Fäden zuſammenhängen . . . . . — 361.
Der gemeinſchaftliche Schwerpunkt mehrerer Gewichte liegt dann entweder am höchſten oder tiefſten, wenn ſie mit einander im Gleichgewichte ſind. . . . . — 365.

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen der Kräfte im Zuſtande des Gleichgewichtes.

§. 1.

Unter **Kraft** verſteht man im Allgemeinen jedes Beſtreben, Bewegung hervorzubringen, es ſey nun, daß Umſtände ſie zulaſſen, oder verhindern. Die gerade Linie, nach welcher eine Kraft den Körper, auf den ſie wirkt, forttreibt, heißt ihre **Richtung**.

So iſt das Fallen der Körper die Wirkung einer Kraft, die man die Schwere nennt, und deren Richtung vertikal niederwärts, oder nach einer auf den ebenen Boden ſenkrechten Linie geht. Ein Körper, der am Fallen gehindert wird, zeigt noch das Beſtreben zu ſinken durch ſein **Gewicht**, das nach Verhältniß ſeiner Maſſe, oder der größern und geringern Menge materieller Theile, die er in ſich enthält, verſchieden iſt. So wie nemlich die Maſſe eines Körpers durch Anhäufung fremder Theile zunimmt, vermehrt ſich ſein Gewicht; mehrere Körper, die man zugleich tragen will, erfordern die **Vereinigung** aller der Kräfte, die zu jedem

[illegible] genommen, [illegible] wären. Dies könnte Verschiedenheit der Kräfte in Rückſicht ihrer G[illegible] [illegible] deutlich machen; allein da auf dieſen [illegible] Begriffen die vieles beruht, ſo wird eine nähere [illegible] derſelben nicht unnütz ſeyn.

§. 2.

Gleiche Kräfte heißen diejenigen, die auf [illegible] und denſelben Punkt nach einerley Richtung angebr[illegible] gleiche Wirkung hervorbringen, und alſo für eine [illegible] werden können, ohne daß dadurch eine [illegible] rung verurſacht wird.

§. 3.

Zwey gleiche Kräfte, die auf einen mate[illegible] Punkt nach entgegengeſetzten Richtun[illegible] wirken, erhalten denſelben in Ruhe.

Geſetzt nemlich, der Punkt bewegte ſich nach ir[illegible] einer Seite zu, ſo würde, wenn man die Kräfte [illegible] wechſelte, eben dieſe Bewegung nach entgegengeſ[illegible] Seite erfolgen. Da nun die Verwechslung der K[illegible] ihrer Gleichheit zu Folge, die Wirkung derſelben [illegible] ändert, ſo folgt, daß auch ohne dieſe Verwechsl[illegible] beyde Bewegungen des Punktes nach entgegengeſ[illegible] Richtungen ſtatt finden müßten. Dies iſt aber ein [illegible] Widerſpruch, und alſo kann der Punkt nach keiner [illegible] ſich hinbewegen; er bleibt folglich in Ruhe.

§. 4.

Man ſagt allgemein von Kräften, die in [illegible] Verbindung ſtehen, daß ſie ihre Wirkunge[illegible]

gen einander aufheben, sie stehen unter sich im Gleichgewichte. Die Lehre vom Gleichgewichte macht einen besondern Theil der Mechanik aus, den man die Statik nennt. Auf ihr beruhet die ganze übrige Theorie von den Kräften und ihren Wirkungen, weil sie dieselben gerade in dem Zustande betrachtet, der allein dazu passend ist, sie mit einander zu vergleichen, und unbekannte Kräfte aus bekannten zu bestimmen.

§. 5.

Wenn zwey Kräfte, P und Q, die nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, einander das Gleichgewicht halten, so müssen sie gleich groß seyn.

Man nehme eine dritte Kraft R = Q an, so kann man diese für Q substituiren, und es müssen folglich auch P und R noch mit einander im Gleichgewichte seyn (2). Da nun auch Q und R gegeneinander gebracht, sich im Gleichgewichte erhalten (3), so folgt, daß P und Q nach einerley Richtung dieselbe Wirkung ausüben, und also gleich groß sind (2).

§. 6.

Zwey Kräfte, die nach einerley Richtung auf Einen Punkt zusammenwirken, vereinigen sich zu Einer Kraft nach eben der Richtung: denn da beyde Kräfte den Punkt nach dieser Richtung fortzutreiben streben, kann er nach keiner andern als dieser fortgehen. Es muß also irgend eine Kraft geben, die eben das thut.

was beyde in Verbindung bewirken, und dieſe iſt ihnen zuſammengenommen gleich.

§. 7.

Hierauf gründet ſich die Vereinigung zweyer und mehrerer Kräfte zu einem Ganzen, wobey aber allemal erforderlich iſt, daß die einzelnen Theile nach gemeinſchaftlicher Richtung und auf einerley Punkt wirken. Zugleich erhellet nun auch, was es heiße, eine Kraft Q ſey n mal ſo groß, als eine andere P; ſie iſt es nemlich, wenn ſie ſich durch die Vereinigung von n Kräften hervorbringen läßt, deren jede = P iſt. Gegenſeitig iſt $Q = \frac{1}{n} P$, wenn n Kräfte, wovon jede ſo groß als Q iſt, erforderlich ſind, um zuſammengenommen eine Kraft = P zu geben.

§. 8.

Wenn eine Kraft mit andern im Gleichgewichte ſteht, ſo iſt ihre Wirkung zwar ſo lange aufgehoben, als das Gleichgewicht dauert, aber deshalb nicht vernichtet; man ſagt daher ſie übe gegen das, was ihr entgegenwirkt, einen Druck aus. Gewichte geben einen beſondern Fall der Art.

§. 9.

Ein ſolcher Druck kann auf zweyerley Art entſtehen; entweder durch Kräfte, die nach entgegengeſetzter Richtung ſtreben, und dabey gleich ſind (3), oder durch einen unbeweglichen Widerſtand. Wenn nem-

ſich eine Kraft auf etwas wirkt, das nicht weichen kann, ſo wird ſie dadurch gehindert, eine Bewegung hervorzubringen, und artet ſo in einen Druck aus. Dieſes Aufheben der Kraft ſetzt aber von Seiten des Widerſtandes einen gleich großen Gegendruck voraus, ſo daß man unbewegliche Hinderniſſe als paſſive Kräfte zu betrachten hat, die ſich nur da äußern, wo eine Kraft auf ſie einwirkt, und dieſer alsdann gerade ſo ſtark widerſtehen, als ſie von derſelben gedrückt werden. Der Satz alſo: daß jeder Druck allemal einen gleichen und entgegengeſetzten veranlaſſe, paßt auf beyde Fälle, wo Druck ſtatt findet, und iſt daher allgemein.

§. 10.

Wenn man zu gegebenen Kräften, zwiſchen denen Gleichgewicht ſtatt findet, neue Kräfte hinzufügt, die ebenfalls unter ſich im Gleichgewichte ſtehen, ſo wird dadurch das Gleichgewicht nicht aufgehoben.

Weil nemlich dieſe hinzukommenden Kräfte ihre Wirkung gegeneinander aufheben, ſo werden ſie dadurch unfähig, auf die Verbindung der ſchon vorhandenen Kräfte auf irgend eine Art zu wirken, und es geſchieht alſo durch ihr Hinzukommen nichts, was das Gleichgewicht ſtören könnte.

§. 11.

Wenn gegenſeitig unter einer Verbindung zu Kräften, die mit einander im Gleichge-

wichte stehen, einige vorhanden sind, die für sich einander das Gleichgewicht halten, so kann man diese von den übrigen trennen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht unter den zurückbleibenden aufgehoben würde.

Denn diese Kräfte sind für die andern so gut als nicht vorhanden, und können also zur Hervorbringung des Gleichgewichtes nichts beytragen, wenn es nicht zwischen den übrigen Kräften schon an sich statt findet.

§. 12.

Fig. 1. Es sey ACB eine unbiegsame gerade Linie. An den Punkten A und B ziehen zwey gleiche Kräfte nach Richtungen Aa und Bb, die auf die Linie senkrecht sind, niederwärts; dagegen ziehe in C, der Mitte von AB, eine doppelt so große Kraft nach entgegengesetzter Richtung Cc aufwärts; ich behaupte, diese drey Kräfte werden einander gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Beweis 1) Man nehme Anfangs nur die beyden gleichen, auf A und B wirkenden Kräfte an, und betrachte den Punkt C als fest, so daß die Linie ACB nicht weiter bewegbar bleibt, als daß sie sich um C drehen läßt.

2) Unter diesen Umständen stehen die beyden Kräfte im Gleichgewichte: denn zöge die eine den Punkt A herab, so würde aus gleichem Grunde auch die andere den Punkt B herabziehen. Dadurch würde aber, weil C nicht weichen kann, die Linie gebogen; gegen die Voraussetzung.

3) Beyde Kräfte ſtreben vereinigt, den Punkt C nach ihrer gemeinſchaftlichen Richtung fortzuziehen; er widerſteht alſo mit der doppelten Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Cc.

4) Iſt daher dieſer Punkt beweglich, ſo erfordert das Gleichgewicht eine dritte Kraft nach Cc, doppelt ſo groß als jede der beyden andern: denn durch dieſe leidet der Punkt eben den Druck wie vorhin, und alles bleibt ungeändert.

5) Alſo halten genannte drey Kräfte einander an der Linie im Gleichgewichte.

§. 13.

Fig. 1. 1) Es ſey jetzt die Entfernung AC = 2 . CB; man mache EC = CB, ſo daß E die Länge des Arms AC halbirt, und laſſe auf E und B nach den ſenkrechten Richtungen Ee und Bb zwey Kräfte, jede = 2P, wirken, ſo hält eine Kraft = 4P, nach Cc angebracht, ihnen das Gleichgewicht (§. 12.).

2) Man bringe ferner auf A und C zwey Kräfte, jede = P, nach den ſenkrechten Richtungen Aa und Cγ, und dagegen in E eine Kraft = 2P nach Ee an, ſo heben auch dieſe ihre Wirkung gegen einander auf, und das Gleichgewicht bleibt noch wie vorhin. (§. 10.)

3) Unter dieſen Kräften heben ſich nun die in E von ſelbſt auf (1,2), und man kann ſie wegnehmen, ohne das Gleichgewicht dadurch zu ſtören (§. 11.). [illegible]en ſo kann man der Kraft 4P, die nach Cc wirkt [illegible]), den Theil P rauben, wenn man dagegen auch die

die gleichen und entgegengesetzten Kräfte in E, und wenn man von der Kraft nach Cc so viel abnimmt, als die Kraft nach Cγ in ihr aufhebt, so bleibt nach Co noch $(n+2)$ P übrig; also sind wieder die Kräfte P und $(n+1)$ P in A und B mit der Kraft $(n+2)$ P in C nach entgegengesetzter Richtung, im Gleichgewichte.

Das angegebene Gesetz erstreckt sich also auch auf die nächste Zahl $n+1$, wenn man es für irgend ein n voraussetzt. Da es nun für $n=2$ bewiesen ist (§. 13.), so gilt es auch für $n=3$ u. s. f., also überhaupt für jede ganze Zahl.

§. 15.

Man nehme jetzt an, die Entfernungen AC und BC haben das Verhältniß $m:n$ zweyer ganzen Zahlen zu einander, und setze $AC=m.EC$, $BC=n.EC$, so stehen zwey Kräfte P und $(m-1)$ P, die auf A und C nach Aa und Cγ angebracht werden, mit ihrer Summe mP, die man ihnen in E nach Ee entgegensetzt, im Gleichgewichte. Zu diesen Kräften kann man noch zwey andere Q und nQ in B und E, nach den Richtungen Bb und Ee hinzufügen, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man dagegen nur auf den Punkt C die Summe beyder $=(n+1)$ Q nach entgegengesetzter Richtung Cc wirken läßt. Man setze nun $nQ=mP$, so heben sich die entgegengesetzten Kräfte in E einander auf, und zugleich wird die Kraft in $B=\frac{m}{n}.P$, und die in C nach Cc gerichtete, $=$

$\frac{(n+1)\,mP}{n} = (m+\frac{m}{n})\,P$. Nimmt man von leßterer den Theil $(m-1)\,P$ hinweg, den die nach Cγ gehende Kraft in ihr aufhebt, ſo bleibt nach Cc noch die Kraft $(1+\frac{m}{n})\,P$ übrig; alſo ſind auch hier die beyden Kräfte P und $\frac{m}{n}\,P$ nach Aa und Bb, die im verkehrten Verhältniſſe der Entfernungen AC und BC ſtehen, mit ihrer nach Cc wirkenden Summe $(1+\frac{m}{n})\,P$ im Gleichgewichte; wodurch ſich das Geſetz (§. 14.) allgemein auf jedes Verhältniß der Entfernungen ausdehnt.

Es iſt nemlich klar, daß auch irrationale Verhältniſſe hierunter begriffen ſind, weil man jedes irrationale Verhältniß m:n als ein rationales anſehen kann, deſſen Glieder m und n unendlich ſind, oder dem man ſich dadurch ins Unendliche nähern kann, daß man eins von ihnen n, ins Unendliche wachſen läßt.

§. 16.

Fig. 1. **Gegenſeitig folgt, daß wenn zwiſchen drey Kräften P, Q und R, die an einer unbiegſamen geraden Linie AB nach ſenkrechten Richtungen Aa, Bb, Cc ziehen, Gleichgewicht ſtatt findet, die beyden äußern P und Q zuſammen genommen ſo groß als die mittlere R ſeyn, und ſich verkehrt wie die Entfernungen AC und BC verhalten müſſen.**

Beweis 1) Die Kräfte P und Q, da sie der Kraft R das Gleichgewicht halten, wirken auf den Punkt C mit einer Kraft = R nach entgegengesetzter Richtung Cγ. Wenn man also die Kraft R wegnimmt, und statt ihrer den Punkt C befestigt, so übt derselbe als unbeweglicher Widerstand einen Druck = R nach Cc aus (§. 9.), und das Gleichgewicht bleibt nach wie vor.

2) Man bringe auf die Punkte A und B nach den entgegengesetzten Richtungen Aα und Bβ zwey neue Kräfte M und N an, die das Verhältniß BC : AC zu einander haben, so wird durch diese das Gleichgewicht nicht aufgehoben, weil sie wegen des festen Punktes C für sich im Gleichgewichte stehen.

3) Setzt man nun M = P, so heben sich beyde einander auf, folglich müssen dann auch Q und N einander aufheben, und, da sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich groß seyn.

4) [illegible] man also für M und N in der [illegible] 2), die gleichen Kräfte P und Q, so erhält man:

$$P : Q = BC : AC$$

5) Man [illegible] nunmehr wieder den Punkt C als beweglich, und alle drey Kräfte P, Q und R gegen einander wirkend. [illegible] Gleichgewicht [illegible] Punkte A und B nach den Richtungen [illegible] andere Kräfte [illegible] ihre Summe [illegible]

wenn die ſich aufhebenden Kräfte in A und B weggenommen werden, wodurch das Gleichgewicht auf die beyden Kräfte R und P + Q zurückgeführt wird.

6) Da dieſe nun entgegengeſetzte Richtung haben, ſo hat man $R = P + Q$, als die zweyte Bedingung des Gleichgewichts.

Vertheilung der Laſt auf zwei Punkte.

§. 17.

Aufgabe. Die Kräfte P und Q ziehen an der unbiegſamen Linie AeB bey A und B nach den ſenkrechten Richtungen Aa und Bb; man ſucht den Punkt C, wo ihre Summe P + Q nach entgegengeſetzter Richtung angebracht werden muß, um beiden das Gleichgewicht zu halten.

Auflöſung. 1) Es ſey die Länge $AB = a$, $AC = x$, ſo iſt $BC = a - x$, und folglich nach den Bedingungen des Gleichgewichtes $P(a - x) = Qx$ (§. 16.).

2) Alſo $Pa = (P + Q)x$, und daher $AC = x = \frac{Pa}{P+Q}$, $BC = a - x = \frac{Qa}{P+Q}$

§. 18.

Geſetzt, zwey Menſchen, deren Kräfte ſich wie m : n verhalten, ſollen auf einer Stange oder Tragbohre von gegebener Länge AB, eine Laſt tragen, ſo hat man aus vorigem §. die Auflöſung der Frage, auf

welchen Punkt dieſe Laſt angebracht werden muß, damit ſie zwiſchen beyden, ihren Kräften gemäß, vertheilt werde. Die Kräfte, die ſie dabey anwenden, ſind nemlich vertikal aufwärts gerichtet, und müſſen der Laſt, die vertikal niederwärts zieht, an der Stange das Gleichgewicht halten; wir erhalten alſo dieſem zu Folge

$$AC = \frac{ma}{m+n}, \text{ und } BC = \frac{na}{m+n}$$

§. 19.

Eine Frage derſelben Art iſt, wie ſtark zwey Unterlagen bey A und B gedrückt werden, die vermittelſt einer unbiegſamen Stange oder dergleichen eine Laſt O tragen, welche an dieſer irgendwo in C aufgehängt iſt.

Hier vertreten die Unterlagen die Stelle zweyer vertikal aufwärts gerichteten Kräfte, die der Laſt O das Gleichgewicht halten, indem ſie nach dieſer Richtung einen Druck ausüben. Der geſuchte Druck alſo, den ſie leiden, iſt jenem gleich und entgegengeſetzt. Nennt man daher P den Druck, der auf A kommt, Q den, der auf B kommt, und die Entfernungen $AC = f$, $BC = g$, ſo hat man;

$$Pf = Qg, \quad P + Q = O.$$

Man multiplicire in letzterer Gleichung allenthalben durch g, und ſubſtituire dann für Qg den Werth Pf, ſo bekommt man: $P(f+g) = Og$, alſo:

$$P = \frac{Og}{f+g} \text{ und eben ſo } Q = \frac{Of}{f+g}$$

Der geradlinigte Hebel.

§. 20.

Die unbiegsame Linie ACB bekommt den Namen eines geradlinigten Hebels, wenn sie in irgend einem Punkte C befestigt ist, so daß sie sich um denselben nach Gefallen drehen läßt. Der feste Punkt C heißt sein Ruhepunkt; auch wohl, wenn man die Kräfte als Gewichte betrachtet, der Unterstützungspunkt, die Unterlage.

§. 21.

Die Bedingungen des Gleichgewichts zweyer Kräfte am Hebel, sind bloße Folgerungen aus dem, was bereits vorgetragen ist. Da nemlich die Befestigung des Punktes C statt der Kraft R dient (§. 16. 1.), so fällt diese aus der Betrachtung weg, und die allgemeinern Sätze des §. 15 und §. 16. lauten hier folgendermaßen:

1. Zwey Kräfte P und Q, die an den Punkten A und B eines Hebels nach senkrechten Richtungen Aa und Bb ziehen, halten einander das Gleichgewicht, wenn P : Q = BC : AC d. i wenn sie sich verkehrt, wie ihre Entfernungen vom Ruhepunkte verhalten; und umgekehrt

2) wenn am Hebel die Kräfte P und Q miteinander im Gleichgewichte seyn sollen, so muß P : Q = BC : AC seyn.

3. Der Ruhepunkt C leidet von den beyden Kräften einen Druck P+Q nach einer Richtung Cγ, die ebenfalls senkrecht auf den Hebel ist, und übt folglich einen gleichen Gegendruck aufwärts nach Cc aus.

§. 22.

Aus der Proportion P : Q = BC : AC erhält man die Gleichung P . AC = Q . BC, welche näher zu erkennen giebt, wonach man eigentlich die Wirkung der Hebelkräfte zu schätzen habe. Gesetzt nemlich, die Kraft P sey an sich kleiner als Q, so kann demungeachtet das Produkt P . AC > Q . BC seyn, und in diesem Falle müßte also Q dennoch vermehrt werden, um unter diesen Umständen der Kraft P das Gleichgewicht zu halten. Man sieht daher, daß die Wirkung einer Kraft am Hebel allein auf das Produkt aus ihr in die Entfernung derselben vom Ruhepunkte ankomme. Dies Produkt heißt das Moment der Kraft.

§. 23.

Bey der unbiegsamen Linie, woran sich gegenseitig drey Kräfte das Gleichgewicht halten, kann man jede derselben so betrachten, als sey sie die Gegenkraft, welche das Gleichgewicht bewirkt. Man nehme die Kraft bey B für diese an, so folgt, daß die andern beyden in Verbindung so auf den Punkt B wirken müssen, als eine Kraft es thun würde, die jener gleich, und nach entgegengesetzter Richtung Bβ angebracht wäre. Befestigt man also den Punkt B, mit Weglassung der

Kraft Q, ſo leidet derſelbe einen Druck = Q nach der Richtung Bβ, und ſetzt dieſem einen gleichen Druck entgegen; wirkt alſo durch ſeine Feſtigkeit eben das, was vorhin die Kraft that, ſo daß das Gleichgewicht dadurch nicht unterbrochen wird. Dies bildet eine zweyte Art von Hebel, der in B ſeinen Ruhepunkt hat, und an welchem die Kräfte P und R nach den entgegengeſetzten Richtungen Aa und Cc ſich im Gleichgewichte erhalten. Man nennt ihn den **einarmigen Hebel.**

§. 24.

Aus $P : Q = BC : AC$ folgt:

$$P : (P+Q) = BC : AB.$$

Setzt man hierinn für $P + Q$ ſeinen Werth R, ſo erhält man folgende Gleichung: $P . AB = R . BC$.

Alſo ſind auch beym einarmigen Hebel im Falle des Gleichgewichtes die Produkte aus den Kräften in die Entfernungen vom Ruhepunkte, oder die Momente der Kräfte einander gleich.

§. 25.

Fig. 1. **In einem Syſteme von Kräften, die unter ſich im Gleichgewichte ſtehen, kann man ohne Verletzung deſſelben mehreren von dieſen Kräften eine einzige ſubſtituiren, wofern dieſe ſo beſchaffen iſt, daß ſie nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, den erwähnten Kräften das Gleichgewicht halten würde.**

Beweis 1) Es ſeyen die Kräfte P und Q, die zu einem Syſteme mehrerer im Gleichgewichte ſtehender

Kräfte

Kräfte gehören, und auf die Punkte A und B nach den Richtungen Aa und Bb wirken, mit einer fremden nach Cc gerichteten Kraft R für ſich im Gleichgewichte, ſo halten auch dieſelben Kräfte P, Q, R, oder drey andere, die ihnen gleich ſind, nach den entgegengeſetzten Richtungen Aα, Bβ und Cγ auf die Punkte A, B und C angebracht, einander das Gleichgewicht.

2) Man bringe dieſe drey letztern in der angegebenen Verbindung auf das Syſtem an, ſo wird durch ſie das Gleichgewicht nicht geſtört (§. 10.). Da aber zwey von ihnen den Kräften P und Q gleich und entgegengeſetzt ſind, ſo heben ſie ſich mit dieſen auf, und das Gleichgewicht bleibt alſo auch noch, wenn beyde Paare aus dem Syſteme weggenommen werden.

3) Alsdann bleibt aber bloß die Kraft R nach der Richtung Cγ zurück, die alſo noch eben ſo auf das Syſtem wirkt, als es vorhin die Kräfte P und Q thaten, folglich ihnen als gleichgültig ſubſtituirt werden kann.

4) Es ſind hier nur zwey Kräfte aus dem Syſteme genommen, und ſo vorgeſtellt, als wirkten ſie am freyen Hebel. Man ſieht aber, daß beydes auf die Sache ſelbſt keinen Einfluß hat, und daß der Beweis von mehrern Kräften, die in jedem andern Zuſammenhange ſtehen, ſich eben ſo führen läßt.

§. 26.

Von einer Kraft, die einer oder mehreren andern Kräften ſubſtituirt werden kann, ohne daß dadurch das

Gleichgewicht bringt würde, sagt man, sie sey ihnen äquipollent. Es können auch mehrere Kräfte zu andern äquipollent seyn, wofern sie nur die Eigenschaft haben, jenen das Gleichgewicht zu halten, wenn man sie nach entgegengesetzter Richtung auf eben die Punkte anbringt. Aequipollente Kräfte sind in der Mechanik eben so zu betrachten, als bey Gleichungen Ausdrücke verschiedener Art, die einerley Werth haben; sie können für einander gesetzt werden, ohne daß die Wirkung, auf der hier alles allein beruhet, dadurch verändert würde.

Gleichgewicht mehrerer Kräfte am Hebel.

§. 27.

Wenn auf der einen Seite eines Hebels ACB, der in C seinen Unterstützungspunkt hat, mehrere Kräfte P, P', P'' ... die wir als Gewichte ansehen wollen, in den Entfernungen f, f', f'' u. s. f. von C angebracht sind, so ist eine einzige Kraft V auf der andern Seite vermögend, ihnen allen das Gleichgewicht zu halten. Man denke sich nemlich diese Kraft in so viele Theile p, q ... u. s. f. getheilt, als einzelne Gewichte vorhanden sind, so daß der Theil p auf das Gewicht P, q auf P' u. s. f. verwandt werden kann, so wird zwischen der ganzen Kraft V und dem Systeme von Gewichten Gleichgewicht statt finden, wenn es zwischen den einzelnen Theilen der Kraft und den Gewichten, jedes besonders genommen, statt hat (§. 10.).

Es sey A der Punkt, worauf die Kraft V angebracht werden muß, und AC = u, so ist vermöge der Voraussetzung des Gleichgewichtes zwischen den einzelnen Theilen:

$pu = Pf$, $qu = P'f'$ u. s. f. also:

$(p+q+r..)u = Pf + P'f' + P''f''$ u. s. f.

oder, da $p+q+r+.. = V$ ist:

$Vu = Pf + P'f' + P''f''...$

woraus erhellet, daß das Moment dieser Kraft = der Summe der Momente aller der einzelnen Gewichte seyn muß, denen gemeinschaftlich sie das Gleichgewicht hält.

§. 28.

Es ist also auch mehreren Gewichten, die auf einer Seite des Ruhepunktes in verschiedenen Entfernungen von demselben hängen, ein einziges Gewicht an eben dem Hebelarme äquipollent, wenn sein Moment der Summe ihrer einzelnen Momente gleich ist (§. 25.).

§. 29.

Aufgabe. Es sind an dem einen Arme eines Hebels die Gewichte P, P', P'' u. s. f. in den Entfernungen f, f', f'' u. s. f., und am andern die Gewichte Q, Q', Q'' u. s. f. in den Entfernungen g, g', g'' u. s. f. vom Ruhepunkte befindlich; man fragt, unter welchen Bedingungen beyde Seiten einander das Gleichgewicht halten werden.

Auflösung 1) Es sey den Gewichten P, P', P'' u. s. f. eine Kraft M in der Entfernung a vom Ruhe-

punkte äquipollent, so hat man $Ma = Pf + P' f' + P'' f'' + \ldots$ (§. 28.)

2) Eben so ist auch, wenn man annimmt, es sey die Kraft N in der Entfernung b vom Ruhepunkte den Gewichten Q, Q', Q'' u. s. f. äquipollent:

$$Nb = Qg + Q' g' + Q'' g'' + \text{u. s. f.}$$

3) Herrscht nun zwischen den Gewichten P, P', P'' .. und Q, Q', Q'' .. Gleichgewicht, so findet dies auch zwischen den Kräften M und N statt, weil man diese jenen substituiren kann, und dem zu Folge ist $Ma = Nb$, also auch

$$Pf + P' f' + P'' f'' + \ldots = Qg + Q' g' + Q'' g'' + \ldots$$

4) Die Summe der Momente der einzelnen Gewichte muß daher auf der einen Seite so groß seyn, als auf der andern, wenn sie einander aufwiegen sollen.

Gemeinschaftlicher Schwerpunkt mehrerer Kräfte an einer unbiegsamen Linie.

§. 30.

Die vorhin angestellte Betrachtung des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte am Hebel bezieht sich auf die Voraussetzung eines festen Punktes, und kann daher nicht geradezu auf den Fall angewandt werden, wenn der Hebelarm frey ist, und bloß durch die gegenseitige Wirkung der Kräfte in Ruhe erhalten werden muß. Wir wollen zu dieser Absicht nun ein anderes Verfahren wählen, welches allgemeiner ist, und zugleich auch zu den weitern Untersuchungen in der Folge den Weg eröffnen wird.

Fig. 2. Wir wollen mit zweyen Kräften P und P′ den Anfang machen, die an der geraden Linie AG auf die Punkte M und N nach den senkrechten Richtungen Mm und Nn angebracht sind, und von einer dritten Kraft S nach entgegengesetzter Richtung Gg im Gleichgewichte erhalten werden. Die Entfernungen der Punkte M und N von einem willkührlichen Anfangspunkte A seyen = x, und x′; die Entfernung Ag = f, so haben wir MG = f — x, GN = x′ — f, also nach den Erfordernissen des Gleichgewichtes

$P(f-x) = P'(x'-f)$, und $S = P+P'$

Erstere Gleichung giebt $(P+P')f = Px + Px'$, daher hat man $f = \frac{Px+Px'}{P+P'}$, die Entfernung von A in der die Summe der beyden Kräfte P und P′ angebracht werden muß, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, oder ihnen äquipollent zu seyn, je nachdem man ihr die entgegengesetzte oder dieselbe Richtung giebt, welche die Kräfte haben.

§. 31.

Fig. 2. Es seyen jetzt drey Kräfte P, P′, P″ auf die Punkte M, N und O der geraden Linie AG in den Entfernungen x, x′, x″ von A angebracht, und eine vierte Kraft S, die auf den Punkt G nach entgegengesetzter Richtung Gg wirkt, halte ihnen zusammen das Gleichgewicht. Den erstern beyden P und P′ ist ihre Summe in irgend einem Punkte der geraden Linie äquipollent, und man kann sie daselbst statt der einzel-

nen Kräfte P und P′ ſubſtituiren, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Es ſey H dieſer Punkt, ſo hat man für denſelben: $AH = \frac{Px + P'x'}{P + P'}$.

Jetzt bleiben alſo nur noch die beyden Kräfte $P + P'$ nach Hh und P″ nach Oo übrig, denen die Kraft S nach Gg das Gleichgewicht halten muß. Dieſem zu Folge iſt $S =$ ihrer Summe, oder $= P + P' + P''$, und $(P + P' + P'')\, f = (P + P') \cdot \frac{Px + P'x'}{P + P'} + P''x'' = Px + P'x' + P''x''$, folglich:

$$f = \frac{Px + P'x' + P''x''}{P + P' + P''}.$$

§. 32.

Hieraus läßt ſich ſchon ſchließen, wie für mehrere Kräfte die zum Gleichgewichte erforderliche Gegenkraft, und der Punkt G auf den ſie angebracht werden muß, beſtimmt werde. Nennt man nemlich $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ .. $P^{(n)}$ die vorhandenen Kräfte, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ .. $x^{(n)}$ die Entfernungen der Punkte von A in der geraden Linie, S die Gegenkraft, f die Entfernung AG, ſo ſieht man leicht, daß

$S = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} .. + P^{(n)}$ und

$Sf = P^{(1)}x^{(1)} + P^{(2)}x^{(2)} + P^{(3)}x^{(3)} .. + P^{(n)}x^{(n)}$

ſeyn werde.

Um dies allgemein zu zeigen, ſetze man, es ſey dieſe Vermuthung für irgend eine Anzahl von n Kräften bereits gerechtfertigt. Man bringe ſodann noch eine

Kraft $P^{(n+1)}$ auf die Linie in der Entfernung $x^{(n+1)}$ von A an, und nenne S', f' die veränderten Werthe, welche S und f dadurch bekommen, so daß jetzt S' die Kraft ist, welche allen den Kräften $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ ... $P^{(n+1)}$ das Gleichgewicht hält. Da nun S vorhin mit $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ ... $P^{(n)}$ im Gleichgewichte war, so ist sie ihnen nach entgegengesetzter Richtung G-/ angebracht, äquipollent, und kann für sie, ohne Verletzung des Gleichgewichtes, substituirt werden, wodurch das Gleichgewicht auf die drey Kräfte S, $P^{(n+1)}$ und S' gebracht wird. Daraus folgt nun

$$S' = S + P^{(n+1)}$$

$$S'f = Sf + P^{(n+1)} \cdot x^{(n+1)} \text{ (§. 30.)}$$

oder, wenn man für S und Sf ihre Werthe substituirt

$$S' = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \ldots + P^{(n+1)}$$

$$S'f = P^{(1)}x^{(1)} + P^{(2)}x^{(2)} \ldots + P^{(n+1)} \cdot x^{(n+1)}.$$

Also erstreckt sich das Gesetz jedesmal auf $n + 1$ Kräfte, wenn man es für n Kräfte voraussetzt, und gilt folglich, weil es für 2 und 3 Kräfte erwiesen ist, auch für 4, 5 Kräfte u. s. f. und überhaupt für jede beliebige Anzahl.

§. 33.

Wenn beliebig an einer unbiegsamen geraden Linie mehrere Kräfte, so viel deren auch seyn mögen, nach senkrechten Richtungen ziehen, so giebt es allemal einen Punkt in derselben, worauf die Summe derselben nach gegengesetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält, oder wenn man sie nach derselben

Richtung ziehen läßt, ihnen äquipollent iſt. Man nennt ihn den **gemeinſchaftlichen Schwerpunkt** der Kräfte.

Phyſiſcher Hebel.

§. 34.

Aus dem, was §. 22. vom Hebel geſagt iſt, ſieht man die Möglichkeit, wie man einer Laſt durch eine viel geringere Kraft das Gleichgewicht halten könne. Es läßt ſich alſo mit einem kleinen Gewichte vermittelſt des Hebels ein größeres aufwiegen, und folglich durch das kleinere ſchätzen, wie groß es ſeyn müſſe. In der Anwendung kommt nur dabey noch in Betracht, daß der Hebelarm, damit er das Erforderniß der Unbiegſamkeit erfülle, eine körperliche Dicke haben muß, und folglich vermöge ſeines Gewichtes auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte Einfluß hat.

§. 35.

Fig. 1. Wir wollen ſetzen, der Hebel AB ſey ſeiner ganzen Länge nach von gleicher Dicke, ſo kann man ihn als eine gerade Linie betrachten, die allenthalben mit gleichen Gewichten beſchwert iſt. Um den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt aller dieſer unendlich kleinen Gewichte zu finden, laſſe man den Anfangspunkt (§. 32.) in die Mitte C der Linie fallen; alsdann iſt die Summe der Produkte Px auf beyden Seiten derſelben gleich groß, und entgegengeſetzt, folglich die Summe aller Px längſt dem ganzen Hebel = o, mithin auch f = o.

Der Schwerpunkt des Hebels fällt daher in die Mitte deſſelben, und man kann ihn alſo als eine Linie anſehen, in deren Mitte ſein ganzes Gewicht vereinigt iſt.

§. 36.

Fig. 3. Es ſey nun der Hebel AOB in O unterſtützt, und in horizontaler Lage, ſo daß die Gewichte P und Q, welche in M und F einander aufwiegen, nach ſenkrechten Richtungen Mμ und Fϕ wirken. Man ſetze die ganze Länge des Hebels AB = a, ſein Gewicht = G, das man als eine Kraft anzuſehen hat, die in C, der Mitte von AB angebracht iſt; außerdem ſey MO = f, OF = g, OB = b, ſo iſt CO = $\frac{1}{2}$ a − b, und man bekommt daher folgende Gleichung (§. 29.):

$$Pf + G(\tfrac{1}{2}a - b) = Qg.$$

§. 37.

Die Länge des andern Armes AO iſt = a − b, alſo beyder Unterſchied = a − 2b. Nennt man dieſen d, ſo wird:

$$Pf + \tfrac{1}{2}Gd = Qg.$$

Man ſieht hieraus, daß der Einfluß, den das Gewicht des Hebels auf das Gleichgewicht der an ihm befindlichen Kräfte hat, ſich nach dem Unterſchiede der Hebelarme in Anſehung ihrer Längen richtet. Beym gleicharmigen Hebel kommt alſo dies Gewicht gar nicht in Betracht, und man hat für denſelben Pf = Qg, wie beym mathematiſchen Hebel.

§. 38.

Ist die Last im Endpunkte B aufgehängt, so wird $g = b$, folglich $Pf + \frac{1}{2} Gd = Qb$. Dieser Fall findet bey der sogenannten **Schnellwage** statt, welche dazu dient, mit einem bekannten Gewichte P, das sich auf dem längern Arme AO hin und her schieben läßt, jede noch so große Last Q abzuwiegen. Man nennt P bey ihr das **Laufgewicht.**

§. 39.

Für $P = o$ wird $Qb = \frac{1}{2} Gd$, also $Q = \frac{Gd}{2b}$, wodurch das Gewicht bestimmt wird, das ohne Gegengewicht bloß auf die Ueberwucht des längern Armes AO verwandt werden muß. Dies läßt sich leicht durch einen Versuch finden, und kann daher als eine bekannte Größe in die Gleichung hineingebracht werden. Man setze es $= H$, so erhält man $Hb = \frac{1}{2} Gd$, also:

$Pf = (Q - H) b$, und wenn man den Quotienten $\frac{P}{b}$, der hier beständig ist, A nennt, so wird $Q = Af + H$.

Das Gewicht Q besteht also aus zwey Theilen, dem veränderlichen Af, der sich wie f verhält, und dem unveränderlichen H, und kann daher nach dieser Formel sehr leicht berechnet werden.

§. 40.

Gegenseitig wird $f = \frac{(Q - H) b}{P}$, oder, wenn

man $\frac{Q}{P} = m$, und $\frac{Hb}{P} = c$ ſetzt, ſo giebt dies für f den einfachen Ausdruck $mb - c$, nach dem ſich auf dem Arme AO folgendermaaßen eine Scale zur Angabe des Gewichtes entwerfen läßt.

Fig. 4. Man ſchneide auf einer Linie DA von unbeſtimmter Länge von D aus die Stücke b, 2b, 3b u. ſ. f. ab, welches die Punkte 1, 2, 3, 4 u. ſ. f. geben mag, und nehme $DO = c$; ſo ſind O2, O3, O4 u. ſ. f. die Entfernungen, die den Werthen 2P, 3P, 4P u. ſ. f. für Q entſprechen. Man kann nun noch die gleichen Zwiſchenräume zwiſchen den Punkten 1, 2, 3 u. ſ. f. ferner eintheilen, und ſo durch dieſe Theilungspunkte das Gewicht Q mit einer Genauigkeit beſtimmen, wie nur irgend verlangt werden kann.

§. 41.

Fig. 1. Es ſey ACB ein einarmiger Hebel, der in dem Endpunkte B unterſtützt iſt, und an deſſen anderem Endpunkte A eine Kraft nach vertikaler Richtung Aa aufwärts drückt, um einer Laſt Q, die in C nach Cγ den Hebel nieder zu ziehen ſtrebt, das Gleichgewicht zu halten. Man ſetze die Länge $AB = f$, das Gewicht des Hebels, das dieſer Länge proportional iſt, $= \varkappa f$, $CB = b$, ſo hat man die Gleichung:

$$Pf = Qb + \tfrac{1}{2}\varkappa f^2, \text{ und dieſe giebt } P = \frac{Qb}{f} + \tfrac{1}{2}\varkappa f.$$

Sowohl für ein unendlich großes als unendlich kleines f wird dieſer Ausdruck unendlich; alſo erhellet,

... ein Minimum ſeyn müſſe, oder ... Länge des Hebels ſtatt finde, bey welcher die ... die Laſt am vortheilhafteſten wirkt. Um ... differenziire man obige Gleichung, in- ... dieſe P und f als veränderlich anſieht, ſo er- ... Pdf + fdP = xf. Hierin dP = o geſetzt, ... Pdf = xf, d. i. die Kraft muß = dem Gewichte ... ſeyn. Man ſubſtituire für P dieſen Werth ... Gleichung, ſo wird $\frac{1}{2} xf^2 = Qb$, folglich $f =$

Winkelhebel.

§. 42.

Es ſey AOB ein Winkel mit unbiegſamen ... ein, und um den feſten Punkt O beweglich, ohne ... ſeine Größe ſich ändern kann. Wenn an dieſem ... Kräfte in gleichen Entfernungen AO und BO vom ... Drehungspunkte nach Richtungen Aa und Bb zie- ... die ſenkrecht auf die Arme ſind, und in der Ebene ... Winkels liegen, ſo iſt klar, daß ſolche einander das ... Gleichgewicht halten müſſen: denn es geſchieht hier, ... vom geradlinigten Hebel, auf beyden Seiten ganz ... alſo hat der Winkel eben ſo viel Beſtreben ... einen Seite ſich zu drehen, als nach der an- ... und bleibt daher ruhen.

§. 43.

Lehrſatz. Sind an dem Winkelhebel

zwey Kräfte P und Q in ungleichen Entfernungen AO und BO vom Ruhepunkte nach senkrechten Richtungen Aa, Bb angebracht, so halten sie einander das Gleichgewicht, wenn sie sich, wie beym geradlinigten Hebel, verkehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

Beweis. 1) Man mache EO = OB, und bringe in A die Kraft P nach Aa und in E eine Kraft = Q nach der Richtung Ee an, so stehen diese am einarmigen Hebel AO im Gleichgewichte, weil P : Q = EO : AO ist.

2) Dies Gleichgewicht bleibt noch, wenn in B die Kraft Q nach Bb, und in E eine gleich große nach Ee angebracht wird (§. 42.).

3) Dann aber heben sich die beyden gleichen und entgegengesetzten Kräfte in E, und können folglich weggenommen werden; so daß auch die beyden übrigbleibenden Kräfte P und Q in A und B noch mit einander im Gleichgewichte seyn müssen.

§. 44

Fig. 5. Gegensatz: wenn die Kräfte P und Q am Winkelhebel sich das Gleichgewicht halten, so folgt, daß P:Q = BO:AO seyn müsse.

Man bringe nämlich auf den Punkt A noch eine Kraft = P, nach entgegengesetzter Richtung Aa, und in B eine Kraft R nach Bb an, die das Verhältniß R:AO zu einander haben. Diese beyden Kräfte sind sich im Gleichgewichte, und können also das schon

vorhandene Gleichgewicht zwiſchen P und Q nicht. Da nun die Kräfte in A ſich aufheben, ſo folgt, daß auch die beyden Kräfte Q und R bey B im Gleichgewichte ſtehen, und, weil ſie einander entgegengeſetzt ſind, gleich groß ſeyn müſſen. Man hat folglich: $Q = R$, und dieſer Werth für R in vorhergehende Proportion ſubſtituirt, giebt $P : Q = BO : AO$.

Zweytes Kapitel.

Von der Zuſammenſetzung und Zerlegung der Kräfte.

---

§. 45.

Fig. 6. **Lehrſatz.** Zwey gleiche Kräfte P und Q, die auf zwey Punkte A und B einer feſten geraden Linie AB nach Richtungen Aα und Bβ wirken, welche mit der Linie gleichläufend aber entgegengeſetzt ſind, halten einander an dieſer Linie das Gleichgewicht.

Beweis. 1) Wäre die Kraft P allein vorhanden, ſo würde ſie den Punkt A nach Aα wirklich fortbewegen. Dies würde zur Folge haben, daß auch der nächſte Punkt a in dieſer Linie, weil er wegen der Feſtigkeit derſelben von A unzertrennlich iſt, dieſem folgen, und um eben ſo viel nach aα fortrücken würde als A.

2) Was von a gilt, erſtreckt ſich auf jeden zunächſtliegenden Punkt, folglich auch auf den Punkt B.

3) Eben dieſe Bewegung würde B aber auch nach entgegengeſetzter Richtung Bβ durch die Kraft Q bekommen; da nun beydes nicht zugleich geſchehen kann, ſo bleibt derſelbe, ſo wie die ganze Linie, unbeweglich, oder die beyden Kräfte ſtehen mit einander an der Linie im Gleichgewichte.

§. 46.

Folgerung 1. Wenn eine Kraft auf den Punkt A einer feſten geraden Linie angebracht iſt, und ihre Richtung Aα in dieſe Linie hineinfällt, ſo iſt eine eben ſo große Kraft in jedem andern Punkte B derſelben ihr äquipollent, wofern ſie dieſelbe Richtung Bα hat (§. 25.).

2. **Man kann daher eine Kraft, die mit andern im Gleichgewichte ſteht, auf jeden beliebigen Punkt ihrer Richtung anbringen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht aufgehoben wird:** denn man kann ohne Verletzung des Gleichgewichtes zwey Punkte ihrer Richtung durch eine feſte gerade Linie in Verbindung bringen, und an dieſer, da ſie in die Richtung der Kraft fällt, die Kraft von einem Punkte auf den andern verlegen.

§. 47.

Fig. 7. **Lehrſatz. Wenn von dreyen Kräften P, Q, R, die gemeinſchaftlich auf einen Punkt C nach den Richtungen Cα, Cβ und Cγ wirken,**

vorhandene Gleichgewicht zwi
nun die Kräfte in A sich aufl
die beyden Kräfte Q und R
stehen, und, weil sie einander
groß seyn müssen. Man ha
dieser Werth für R in vorher
stituirt, giebt P : Q = BO :

Zweytes K

Von der Zusammensetz der Kr

---

§. 45

Fig. 6. **Lehrsatz.** Zwey gl
die auf zwey Punkte A
den Linie A B nach Richt
ken, welche mit der Linie
gegengesetzt sind, halten
nie das Gleichgewicht.

Beweis. 1) Wäre b
so würde sie den Punkt A
gen. Dies würde zur
nächste Punkt a in die
Festigkeit derselben
sem folgen, und um eben
de als A.

P . A

B
e fü
e dan

nach nur unte
nd Q das Glei
den Winkel AC
eile verkehrt verh
en daran grenzen.
Q, und der Winkel
, beſtimmen alſo die
Dem dieſe einen der Lage
inkel nach einem gegeb
Wir wollen nun ſehen,
ein die Stücke beſtimmt wer

§. 49.

Die Größe der Kraft R zu fin
n Kräften P und Q am Punkte C

1) Aus der Forderung, daß R
Gleichgewicht halten ſoll, f

P . Sin ACO = Q . Sin BCO (§. 47.).

die eine B den ander... ...nder gegenseit
gewicht halten soll, ...n also AC über
Winkel ACB so theil... ...genkraft an, die d
Sin BCO ist. ...t hält, so giebt di

Beweis. 1) M...
der Kraft R rückwär... ...CN, oder da Sin BC
O, fälle aus diesem ... = Sin ACO, so hat m
pendikel OA und O...
B einen Winkel ... Sin ACO.

2) Da di... ...d der Winkel ACB gegeb
Kräfte liegen, so ... den Gleichungen (1) und (
gen, ohne das ... Größen, nemlich den Win
also müssen sich ... die sich also beyde daraus f
kelhebel nach ...
Gleichgewicht ...

3) Da ... §. 50.
gehoben wir... ...n Winkel ACB = α, ACO = ...
einer Kra... ... $\alpha - \vartheta$, und man hat:
wirken. ... = Q Sin $(\alpha - \vartheta)$

4) ... = R Sin ϑ
lassung ... ...ung wird:
Kräfte... = Q Sin α Cos ϑ — Q Cos α Sin
wirkt ... Cos α) Sin ϑ = Q Sin α Cos ϑ
folglic...
gelei... ...g $\vartheta = \frac{Q \text{ Sin } \alpha}{P + Q \text{ Cos } \alpha}$ wodurch die ...
aufge... ...aft R bestimmt wird. Diese Gleichu...
... verbunden, giebt nun ferner:
... Cos ϑ = P + Q Cos α

$$R^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 = P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2 \operatorname{Cos} \alpha^2$$
$$R^2 \operatorname{Sin} \vartheta^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \; Q^2 \operatorname{Sin} \alpha^2$$
$$R^2 = P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2$$
$$R = \sqrt{(P^2 + 2PQ \operatorname{Cos} \alpha + Q^2}$$

§. 51.

Vermittelst der beyden Gleichungen (1) und (2) des §. 49. läßt sich auch die Richtung und Größe der Kraft R auf sehr einfache Weise geometrisch darstellen. Man nehme nemlich auf den Richtungen der Kräfte P und Q die Punkte A und B so, daß die Längen AC und BC sich wie die Kräfte P und Q verhalten, und ergänze das Parallelogram ACBD, so ist:

P : Q = AC : AD = Sin BCD (CDA) : Sin ACD also

P Sin ACD = Q Sin BCD.

Daher theilt die Diagonale des Parallelograms den Winkel ACB nach eben dem Verhältnisse, als die Richtung der mittlern Kraft, und fällt folglich mit dieser zusammen.

Ferner ist CB : CD = Sin BDC : Sin CBD = Sin ACD : Sin ACB, zugleich aber auch Q : R = Sin ACO : Sin ACB, folglich CB : CD = Q : R.

Die mittlere Kraft wirkt also nach der Diagonale des konstruirten Parallelograms und verhält sich auch wie diese Diagonale.

§. 52.

Wir haben die beyden Gleichungen P Sin ACO = Q Sin BCO und Q Sin ACB = R Sin ACO aus

[illegible] des Gleichgewichtes zwiſchen den drey Kräften P, Q und R abgeleitet; es kann alſo da, wo [illegible] erfüllt werden, kein Gleichgewicht ſtatt finden. Gegenwärtig laßt ſich nun zeigen, daß ſie die einzigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes ſind, oder daß daſſelbe allemal verhanden ſeyn müſſe, wo ihnen Genüge geſchieht. Man laſſe nemlich (Fig. 7.) auf den Punkt C zwey Kräfte P′ und Q′ = den Kräften P und Q, nach den Richtungen CN und CI an, und nach einer mittlern Richtung γC eine Kraft R′, die ihnen das Gleichgewicht hält, ſo iſt P′ Sin γCN = Q′ Sin γCI, und Q′ Sin ICN = R′ Sin γCN. Der Winkel ICN wird alſo nach eben dem Verhältniſſe getheilt, als der ihm gleiche Winkel ACB; daher hat man γCN = ACO, und mithin R′ = R.

Bringt man demnach auf den Punkt C auch die Kräfte P und Q nach den entgegengeſetzten Richtungen CA und CB, und außer dieſen die dritte Kraft R ſo an, daß ihre verlängerte Richtung mit AC den Winkel ACO macht, wie ihn die Gleichung P Sin ACO = Q Sin BCO beſtimmt, ſo fällt CO mit Cγ zuſammen, und die drey Kräfte P, Q, R halten erſtern dreyen P′, Q′, R′ das Gleichgewicht, weil immer eine der andern gleich und entgegengeſetzt iſt. Man kann nun die erſtern P′, Q′, R′ wegnehmen, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, weil ſie für ſich im Gleichgewichte ſtehen, und ſo muß auch noch zwiſchen den zurückbleibenden Kräften P, Q und R Gleichgewicht ſtatt finden.

§. 53.

Die Kraft R nach entgegengeſetzter Richtung CO auf den Punkt C angebracht, iſt den andern beyden P und Q äquipollent (§. 26.) und heißt die **mittlere Kraft.** Man kann ſich daher vorſtellen, es entſtehe aus den Kräften P und Q durch ihr Zuſammenwirken auf den Punkt C eine einzige Kraft R nach der mittlern Richtung CO, und kann dieſe jenen beyden allemal als gleichgültig ſubſtituiren. Dies nennt man eine Kraft **aus zweyen andern zuſammenſetzen.**

§. 54.

Gegenſeitig kann jede einfache Kraft R ſo angeſehen werden, als ſey ſie aus der Zuſammenſetzung zweyer andern, die gegebene Richtungen CA und CB haben, entſtanden. Um dieſe Kräfte zu finden, darf man nur in CD, der Richtung von R, einen Punkt D annehmen, und aus dieſem mit den Richtungen der geſuchten Kräfte Parallelen ziehen, ſo verhalten ſich dieſe Kräfte zu R, wie die Seiten AC und BC des dadurch entſte-
Fig. 2. henden Parallellograms zur Diagonale CD. Man ſagt in dieſem Falle, die Kraft R ſey in die Kräfte nach CA und CB zerlegt. Dieſe Zerlegung iſt offenbar eine bloße Zurückführung der Kraft auf ihre Theile, aus denen ſie zuſammengeſetzt iſt.

§. 55.

Es ſey CD die Richtung einer gegebenen Kraft P, man in zwey andere nach den Richtungen CA und

der Annahme des G…
Kräften P, Q und R…
ſie nicht erfüllt werden,…
Gegenſeitig läßt ſich
Bedingungsgleichung…
daß daſſelbe allemal …
Genüge geſchieht. Wenn…
Punkt C zwey Kräf… …
Q, nach den Richtungen…
ner mittlern Richtung …
Gleichgewicht hält, …
und Q′ Sin ∠CN = …
wird alſo nach eben de…
ihm gleiche Winkel …
ACO, und mithin R′ …

Bringt man denn…
Kräfte P und Q nach de…
CA und CB, und außer…
an, daß ihre verlängerte…
ACO macht, wie ihn …
Q Sin BCO beſtimmt, …
und die drey Kräfte P, …
Q′, R′ das Gleichgewicht…
gleich und entgegengeſetzt…
ſtern P′, Q′, R′ wegnehm…
ſtören, weil ſie für ſich …
ſo muß auch noch zwiſch…
ten P, Q und R Gleichge…

Der Punkt A kann nur allein nach der auf AC senkrechten Richtung Aa fortrücken; also hat die Kraft nur in so fern ein Bestreben, den Hebel zu drehen, als ein Theil von ihr P Sin FAC, wenn sie nach Aa und AC zerlegt wird, auf erstere Richtung fällt. Der andere Theil P Cos FAC drückt den Hebelarm nach AC an den festen Punkt C, der deshalb einen gleichen Gegendruck nach CA ausübt, und ihn folglich aufhebt. Die Kraft P hat demnach bloß das Moment P . AC Sin FAC den Hebel zu drehen.

Eben dies fließt auch aus folgender Betrachtung:

Man fälle aus C auf die Richtung der Kraft das Perpendikel CG, und lege durch ACF einen Winkelhebel, so kann man die Kraft auf den Punkt F versetzen, ohne daß ihre Wirkung dadurch geändert würde (§. 46.). Sie hat nun am Arme CF senkrechte Richtung, und ihr Moment ist daher P . CF = P . AC . Sin FAC, wie vorhin.

§. 57.

Fig. 9. **Lehrsatz.** Wenn an einer geraden Linie ACB zwey Kräfte P und Q, die nach willkührlichen aber parallelen Richtungen Aα und Bβ ziehen, einer dritten Kraft R nach entgegengesetzter Richtung Cγ das Gleichgewicht halten, so wird dies auch noch geschehen, wenn man alle drey Kräfte an eben den Punkten senkrecht auf die Linie anbringt.

Beweis. 1) Man ziehe durch C eine auf Cγ senkrechte Linie FCG, die die Richtungen Aα und Bβ

in F und G ſchneiden mag, ſo kann man die Kräfte auch auf dieſe Punkte verlegen, ohne dadurch das Gleichgewicht zu ſtören.

2) Sie müſſen ſich alſo auch noch an der Linie FCG, auf die ſie ſenkrecht gerichtet ſind, das Gleichgewicht halten; folglich muß $P + Q = R$ und $FC . P = GC . Q$ ſeyn.

3) Man ſetze nun den Winkel $FAC = \alpha$, ſo iſt $FC = AC \sin \alpha$ und $GC = BC \sin \alpha$. Dies in die Gleichung (2) ſubſtituirt, und dann mit $\sin \alpha$ dividirt, giebt: $AC . P = BC . Q$.

§. 58.

Gegenſeitig folgt, daß drey Kräfte, die ſich an der Linie ACB, auf die ſie ſenkrecht gerichtet ſind, das Gleichgewicht halten, auch dann noch im Gleichgewichte ſeyn müſſen, wenn ſie auf eben die Punkte nach jeden andern parallelen Richtungen angebracht werden. Denn nach dieſer Vorausſetzung hat man $AC . P = BC . Q$, welches mit $\sin \alpha$ multiplicirt, $FC . P = GC . Q$ giebt: alſo ſtehen dieſe Kräfte auch an der Linie FCG nach ſenkrechten Richtungen $F\alpha$, $G\beta$ und $C\gamma$ im Gleichgewichte, folglich auch nach eben den Richtungen an ACB. Man ſieht leicht, daß dieſer Satz, ſo wie der im vorigen §, ſich auf mehrere parallele Kräfte ausdehnen laſſen, die an einer geraden Linie von einer entgegengeſetzten Kraft im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 59.

Wenn drey oder mehrere Kräfte an einem Winkel

hebel AOB angebracht ſind, ſo kann man durch zwey Punkte deſſelben A und B eine gerade Linie AB ziehen, und auf dieſe die Kräfte nach ihren Richtungen verlegen, woraus ſich alsdann die Umſtände beurtheilen laſſen, unter denen ſie ſich an dem Winkelhebel das Gleichgewicht halten: ſollen nemlich die Kräfte an ihm in Gleichgewichte ſeyn, ſo muß das Gleichgewicht auch an AB ſtatt finden, und umgekehrt. Da hierbey die Form des Hebels gar nicht in Betracht kommt, ſo gelten dieſe Schlüſſe auch für den krummlinigten Hebel, ſeine Arme mögen gebogen ſeyn, wie ſie wollen.

Zuſammenwirkung mehrerer Kräfte auf einen Punkt.

§. 60.

Die Größe und Richtung der mittlern Kraft mehrerer, auf einen Punkt C wirkender Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene liegen, beſtimmt man am leichtſten dadurch, daß man jede derſelben nach zweyen ſenkrechten Richtungen CA und CB, die nach Gefallen angenommen werden können, zerlegt, dann die Kräfte nach jeder dieſer Richtungen beſonders ſummirt, und aus beyden Summen eine dritte Kraft zuſammenſetzt. Es mögen M und N dieſe Summen heißen, S die mittlere Kraft, die aus beyden entſpringt, und ϑ der Winkel, den ihre Richtung mit CA einſchließt, ſo hat man $S = \sqrt{(M^2 + N^2)}$, und $M \sin \vartheta = N \cos \vartheta$, alſo

$$\text{tang } \vartheta = \frac{N}{M}.$$

Wir wollen ſetzen, es ſeyen drey Kräfte P, Q und R gegeben, deren Richtungen mit CA die Winkel α, β, γ machen, ſo ſind die Theile, worinn P nach CA und CB zerfällt, P Cos α und P Sin α u. ſ. f., alſo

$$M = P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q\,\mathrm{Cos}\,\beta + R\,\mathrm{Cos}\,\gamma$$

$$N = P\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,\mathrm{Sin}\,\gamma \quad \text{folglich}$$

$$M^2 = P^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + Q^2\,\mathrm{Cos}\,\beta^2 + R^2\,\mathrm{Cos}\,\gamma^2 + 2PQ\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + 2PR\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma + 2QR\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\gamma$$

$$N^2 = P^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha^2 + Q^2\,\mathrm{Sin}\,\beta^2 + R^2\,\mathrm{Sin}\,\gamma^2 + 2PQ\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta + 2PR\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\gamma + 2QR\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\gamma$$

und demnach $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2PQ\,\mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha) + 2PR\,\mathrm{Cos}\,(\gamma-\alpha) + 2QR\,\mathrm{Cos}\,(\gamma-\beta)$

indem $\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha)$, u. ſ. f. Man ſieht leicht, daß $\beta-\alpha$, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ die Winkel ſind, welche zwey und zwey Kräfte mit einander einſchließen; daher beſteht das Quadrat der mittlern Kraft aus den Quadraten der einzelnen Kräfte, und den doppelten Produkten je zweyer, multiplicirt durch die Coſinuſſe der Winkel, die ihre Richtungen miteinander machen. Dieſer Satz erſtreckt ſich, wie man leicht darthun kann, auch auf mehrere Kräfte, und iſt ganz allgemein.

Ferner hat man $\mathrm{tang}\,\vartheta = \dfrac{P\,\mathrm{Sin}\,\alpha + Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{P\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Q\,\mathrm{Cos}\,\beta + R\,\mathrm{Cos}\,\gamma}$

und wenn man CA in die Richtung von P fallen läßt, ſo wird dadurch $\alpha = 0$, alſo

$$\mathrm{tang}\,\vartheta = \frac{Q\,\mathrm{Sin}\,\beta + R\,\mathrm{Sin}\,\gamma}{P + Q\,\mathrm{Cos}\,\beta + R\,\mathrm{Cos}\,\gamma}$$

§. 61.

Fig. 10. **Aufgabe.** Es ſey die Lage von OD gegen drey in O aufeinander ſenkrecht ſtehende Linien OA, OB und OC gegeben; eine gegebene Kraft P wirke nach dieſer Richtung auf den Punkt O, man ſucht die Kräfte, die aus der Zerlegung derſelben nach jenen drey Linien entſpringen.

Auflöſung. 1) Es ſey der Neigungswinkel DOF der Linie OD gegen die Ebene AOB = q, der Winkel FOA in dieſer Ebene = p.

2) Da die Ebene DOF auf AOB ſenkrecht iſt, ſo liegt CO in derſelben; man kann alſo die Kraft nach den Richtungen OC und OF zerlegen, und da COF = 90° iſt, ſo wird erſtere nach OC = P Sin q, letztere nach OF = P Cos q.

3) Die Richtung OF liegt in der Ebene AOB, und die Kraft P Cos q kann alſo ferner nach OA und OB zerlegt werden; es wird nemlich die nach AO = P Cos q Cos p, und die nach BO = P Cos q Sin p.

4) Die Kräfte, welche aus der gegebenen Kraft P entſpringen, ſind alſo:

nach OA = P Cos q Cos p
nach OB = P Cos q Sin p und
nach OC — P Sin q.

§. 62.

Einfacher laſſen ſich dieſe Kräfte noch dadurch ausdrücken, daß man die Lage der Linie OD durch die Winkel α, β und γ beſtimmt, die ſie mit den Richtungen

OA, OB und OC einſchließt. Es iſt nemlich in der Ecke, welche OD, OF und OA an O bilden, und die an OF rechtwinklicht iſt: Cos DOA = Cos DOF . Cos FOA oder Cos α = Cos p Cos q; ferner in der Ecke BDOF : Cos BOD = Cos BOF . Cos DOF, oder Cos β = Sin p Cos q, und endlich Cos COD = Sin DOF, oder Cos γ = Sin q, alſo ſind die drey Kräfte folgende: die nach OA = P Cos α, die nach OB = P Cos β und die nach OC = P Cos γ.

Hierbey iſt nur zu bemerken, daß die Lage der Linie OD ſchon durch die Winkel α und β beſtimmt wird, alſo γ von α und β abhängt. Es iſt nemlich Cos α^2 + Cos β^2 = (Sin p^2 + Cos p^2) Cos q^2 = Cos q^2, folglich Cos α^2 + Cos β^2 + Cos γ^2 = 1.

§. 63.

Gegenſeitig, wenn drey Kräfte P, Q und R nach ſenkrechten Richtungen OA, OB und OC auf einen Punkt wirken, und man nennt S die mittlere Kraft, die aus ihrer Zuſammenſetzung entſpringt, α, β, γ die Winkel, welche ihre Richtung mit jenen dreyen macht, ſo hat man P = S Cos α, Q = S Cos β, R = S Cos γ, alſo $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = S^2$, folglich $S = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$. Ferner iſt dann Cos $\alpha = \frac{P}{S}$, Cos $\beta = \frac{Q}{S}$, Cos $\gamma = \frac{R}{S}$, wodurch die Lage ihrer Richtung beſtimmt wird.

Sind die Richtungen der Kräfte P, Q, R nicht ſenkrecht aufeinander, ſo zerlege man ſie erſt nach dreyen

und ſetze dann die nach jeder
enen Summen zu einer Kraft

der Kräfte an einer feſten Axe.

§. 64.

ſey AZ eine unbiegſame gerade Linie, und
keiner Seite zu beweglich, ſo daß die Hebel-
P, NQ, die in P und Q ſenkrecht daran befe-
, ſich nur um dieſe Punkte in Ebenen, ſenk-
auf AZ, drehen laſſen; dieſe Linie heißt alsdann
feſte Axe.

§. 65.

Lehrſatz. **Wenn die Hebelarme MP und QN in einer gemeinſchaftlichen Ebene liegen, und auf die Punkte derſelben M und N zwey Kräfte P und Q nach Richtungen Mm und Nn wirken, die in den Umdrehungsebenen der Hebelarme ſenkrecht auf ſie ſind, ſo halten dieſe einander das Gleichgewicht, wenn P : Q = NQ : MP iſt.**

Beweis 1) Wenn zwey Ebenen ſich ſenkrecht ſchneiden, ſo ſteht eine Linie, die in der einen dieſer Ebenen auf ihrem Durchſchnitte ſenkrecht iſt, auf der andern Ebene ſenkrecht.

2) Die Umdrehungsebene des Hebelarms MP über die Ebene MPQN in MP ſenkrecht, und die Linie Mm ſteht in erſterer ſenkrecht auf MP, alſo

OA, OB und OC einſchließt. C
Ecke, welche OD, OF und OA
an OF rechtwinklicht iſt: Cos D
FOA oder Cos α = Cos p (
BDOF : Cos BOD = C
Cos β = Sin p Cos q,
DOF, oder Cos γ = Si
folgende: die nach OA
P Cos β und die nach
Hierbey iſt nur
nie OD ſchon durch
alſo γ von α und
+ Cos β =
folglich Cos

Gegen
ſenkrechte
Punkt
aus
kel,

ist sie auf der Ebene MPQN
dies folgt für die Richtung Nn.

3) Man ziehe die Linie M
o schneiden mag, und betrachte
ist diese Linie für die Kräfte P
o seinen Ruhepunkt hat, un
Mm, Nn senkrecht sind.

4) Nun ist vermöge
MP : NQ, und in den ä
NQo, MP : NQ = M
Mo : No, folglich sind

Folgerung. 1.
Axe AZ einander
dies nur geschehen
Mo : No = M

2. Die
tet sich also na
nung von dies = Qq
Moment der von Hebel

3.
pollent, die §. 69.
vertheilt wi Den Dr
fällt, wel 97.) auf die
Axe beweg 1) Man bri
den Punkt an, so wirkt
angebracht, Winkel qOn.
Gleichgew fällt also in ein

Op, ſenkrecht auf OQ, und in eine = Q Cos qOn nach Oq mit OQ parallel.

3) Erſtere hat das Moment Q . OQ Sin qOn = Q . NQ, und ſteht mit P im Gleichgewichte; daher ſie den Druck Q Sin qOn auf den Punkt Q hervorbringt. (66. 4.)

4) Die andere Q Cos qOn wirkt geradezu auf den Punkt Q, indem ſie den Hebelarm OQ von ihm loszureißen ſtrebt; folglich bewirken beyde in Verbindung an dieſem Punkte der Axe den Druck Q nach einer mit On parallelen Richtung.

5) Die Kräfte P und Q drücken demnach die Axe ſo, als wären ſie nach parallelen Richtungen unmittelbar auf die Punkte P und Q der Axe angebracht.

6) Der Satz (66. 4.) wird hierdurch auf ſenkrechte Hebelkräfte an der Axe überhaupt ausgedehnt; man ſieht nemlich, daß er auch dann noch gelte, wenn mehrere dergleichen Kräfte an ihr im Gleichgewichte ſtehen.

§. 70.

Fig. 13. **Aufgabe.** An der Axe AB, die in den Punkten A und B gehalten wird, befindet ſich ein Hebelarm DF; im Punkte F zieht eine Kraft P nach der Richtung Ff, die mit der Axe parallel iſt; man ſucht den Druck, den die Axe in A und B durch dieſe Kraft leidet.

Auflöſung 1) Man zerlege die Kraft P in zwey andere M und N nach den Richtungen FA und FB, die mit der Richtung Ff die Winkel AFf = BAF, und

fFl = ABF machen; ſo wird, wenn wir BAF = η, ABF = ϑ ſetzen: $M = \frac{P \sin \vartheta}{\sin(\eta+\vartheta)}$, $N = \frac{P \sin \eta}{\sin(\eta+\vartheta)}$ (§. 55.)

2) Da die Richtungen dieſer Kräfte M und N durch die Punkte A und B gehen, ſo kann man ſie unmittelbar auf dieſelben anbringen. (66.)

3) Man zerlege erſtere nach Aα, ſenkrecht auf die Axe, und nach Aa, längs derſelben, ſo wird die ſenkrechte $= M \sin \eta = \frac{P \sin \eta \sin \vartheta}{\sin(\eta+\vartheta)}$ und die der Axe parallele $= M \cos \eta = \frac{P \cos \eta \sin \vartheta}{\sin(\eta+\vartheta)}$

4) Eben ſo entſpringt aus N eine nach Bβ, ſenkrecht auf die Axe, $= N \sin \vartheta = \frac{P \sin \eta \sin \vartheta}{\sin(\eta+\vartheta)}$, und eine nach BA $= N \cos \vartheta = \frac{P \sin \eta \cos \vartheta}{\sin(\eta+\vartheta)}$

5) Die beyden Kräfte längs der Axe geben zuſammen die Kraft $\frac{P(\sin \eta \cos \vartheta + \cos \eta \sin \vartheta)}{S(\eta+\vartheta)}$ = P, welche auf den Punkt A kommt. Die Axe muß alſo in A mit der ganzen Kraft P nach der Richtung AB gehalten werden, d. i. ſie wird eben ſo in A gedrückt, als wenn die Kraft P unmittelbar auf einen ihrer Punkte nach ihrer Richtung angebracht wäre.

6) Außerdem leiden nun noch die Punkte A und B nach den entgegengeſetzten Richtungen Aα und Bβ

den Druck $\frac{P \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Sin} \vartheta}{\operatorname{Sin}(\eta + \vartheta)}$ (3. 4.), und da $\frac{\operatorname{Sin} \eta}{\operatorname{Sin}(\eta + \beta)}$ $= \frac{DF}{AB}$ ist, so wird dieser $= \frac{P \cdot BF \operatorname{Sin} \beta}{AB} = \frac{DF}{AB} \cdot P$

§. 71.

Der Seitendruck, den die Punkte A und B leiden, liegt also mit dem Hebelarme DF in Einer Ebene, und ist seiner Länge proportional; außerdem verhält er sich direkt wie die Kraft, und verkehrt wie die Entfernung der Punkte A und B.

Hiernach läßt sich z. B. beurtheilen, welche Gewalt die Angeln einer Thür durch das Gewicht derselben leiden; oder bey Stampfmühlen: wie stark die Stempel gegen die Leitungen drücken, und wie dieser Druck geringer oder größer sey, je nachdem die beyden Leitungen weiter auseinander, oder näher zusammenliegen.

§. 72.

Fig. 14. **Aufgabe.** Auf einer unbeweglichen Axe AB sind mehrere Hebelarme senkrecht befestigt, an denen Kräfte nach willkührlichen Richtungen ziehen, und sich im Gleichgewichte erhalten; man fragt, welchen Druck die Punkte A und B, wo die Axe gehalten wird, leiden werden.

Auflösung 1) Es sey an einem dieser Hebelarme M die Kraft P befindlich. Man zerlege sie nach §. 61. in drey andere, nach den Richtungen MD, Mm und Mn, wovon erstere beyden in der Umdrehungsebene

fFl = ABF machen; so wird, ... nd, und le

ABF = ϑ setzen: $M = \frac{P \sin}{\sin(}$ ... auf die Axe

(§. 55.) ... als sey sie nach

2) Da die Richt... ...rauf angebracht,

durch die Punkte A un... ...70.), weil sie m

mittelbar auf dieselb... ...t steht, und ihr als

3) Man zer... ...die ganze Kraft P in

die Axe, und n... ...auf die Axe ausübt,

senkrechte = M ... gleicher Richtung au

Axe parallel ... ...ck auf die Punkte A und

... ...zeigt worden.

... ...iden die Punkte A und B

re... ...Kraft noch den Druck $\frac{DM}{AB}$.

... DM parallel sind.

... P gezeigt ist, gilt auch von den

... ...enen Kräften.

Drittes Kapitel.

Von Schwerpunkte fester Körper

---

§. 73.

Ein ... Körper läßt sich als ein System von

... wenn man will, unendlich kleinen

unbiegsame Linien so mit einander
eins dieser Theilchen sich bewegen
ndern zugleich aus ihrer Lage zu

e eines festen Körpers besteht nem=
jene Theile unter allen Umständen ei=
neinander behalten, gerade so als hin=
unbiegsame Linien miteinander zusammen.
entlich diesen Zusammenhang zwischen den
len bewirkt, kommt hier nicht weiter in Betracht;
nug, daß in jener Vorstellung die Bedingung der
stigkeit ganz enthalten ist.

§. 74.

Aufgabe. In einem solchen Systeme von kör=perlichen Punkten werden die einzelnen Elemente von Kräften m, m', m'' u. s. f. nach parallelen Richtungen solicitirt; man sucht den Punkt in demselben, wo die Summe aller dieser Kräfte nach entgegengesetzter Rich=tung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält.

Auflösung. 1) Man nehme eine Ebene an, wor=auf die gemeinschaftliche Richtung der Kräfte senkrecht ist, ziehe in dieser nach Gefallen die gerade Linie AB (Fig. 15.) und wähle in derselben irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte.

2) Aus einem Punkte Z des Systems fälle man auf diese Ebene das Perpendikel ZY, und in der Ebene Y auf AB das Perpendikel YX, so wird die Lage

dieſes Punktes Z gegen A durch die drey Ordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ beſtimmt.

3) Für einen andern Punkt Z′ ſeyen eben dieſe Coordinaten $AX' = x'$, $X'Y' = y'$, $Y'Z' = z'$.

4) Die Punkte Z, Z′ ſind der Bedingung zu Folge durch eine unbiegſame gerade Linie ZZ′ verbunden, und das angenommene Gleichgewicht bleibt alſo noch, wenn man den beyden Kräften m und m′, welche auf dieſe Punkte nach parallelen Richtungen wirken, in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkte ζ ihre Summe nach eben der Richtung ζv ſubſtituirt. Für dieſen Punkt hat man nun

$$Z\zeta : Z'\zeta = m' : m \text{ alſo:}$$
$$Z\zeta : ZZ' = m' : m + m'$$

5) Das Perpendikel Zz, aus Z auf Z′Y′ gefällt, werde von der darauf ſenkrechten Richtung ζv in o geſchnitten, ſo folgt aus der Aehnlichkeit der Dreyecke Zζo und ZZ′z

$$Z\zeta : ZZ' = Zo : Zz; \text{ alſo iſt auch}$$
$$Zo : Zz = m' : m + m' \text{ und eben ſo:}$$
$$\zeta o : z'z = m' : m + m', \text{ oder}$$
$$\zeta o : (z' - z) = m' : m + m', \text{ folglich}$$
$$\zeta o = \frac{m'(z' - z)}{m + m'}, \text{ und } \zeta v = z + \frac{m'(z' - z)}{m + m'} =$$
$$= \frac{mz + m'z'}{m + m'}$$

6) Weil $Yv = Zo$, und $YY' = Zz$, ſo iſt ferner

$$Yv : YY' = m' : (m + m')$$

Wenn nun $v\xi$ ſenkrecht auf AB gezogen wird, und das

aus Y auf Y'X' gefällte Perpendikel dieſelbe in l ſchneidet, ſo iſt auf gleiche Art:

$Yv : YY' = vl : Y'y = Yl : Yy$ alſo:

$vl : Y'y = m' : (m+m')$ folglich

$$vl = \frac{(y'-y)\,m'}{m+m'}, \text{ und } v\xi = \frac{my+m'y'}{m+m'}$$

7) Da endlich $X\xi = Yl$ und $XX' = Yy$, ſo hat man auch:

$x\xi : XX' = m' : (m+m')$, alſo

$$x\xi = \frac{m\,(x'-x)}{m+m'} \text{ und } A\xi = \frac{mx+m'x'}{m+m'}$$

8) Mit der Kraft $m+m'$ im Punkte ζ, deſſen Coordinaten wir eben beſtimmt haben, kann man nun ferner die Kraft m'', die auf den nächſten Punkt Z'' nach eben der Richtung wirkt, ſo verbinden, daß dadurch eine einzige äquipollente Kraft hervorgebracht wird. Dieſe iſt nemlich $= m+m'+m''$, und iſt auf den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt von ζ und Z'' gerichtet.

9) Geſetzt, es ſind auf ſolche Weiſe von i Punkten die Kräfte $m, m' \ldots m^{(i)}$ zuſammen in eine Kraft M vereinigt, und die Coordinaten des Punktes, worauf ſie angebracht werden muß $= X$, Y und Z, ſo wird, wenn noch eine Kraft $m^{(i+1)}$ eines fremden Punktes, deſſen Coordinaten $x^{(i+1)}$, $y^{(i+1)}$, $z^{(i+1)}$ ſind, hinzukommt, dieſe ſich ſo mit M verbinden, daß die neue Kraft $M' = M + m^{(i+1)}$ ſeyn, und auf einen Punkt wirken muß, der zu Coordinaten $X' = \frac{MX + m^{(i+1)}x^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$

$$Y' = \frac{MY + m^{(i+1)} y^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}, \quad Z' = \frac{MZ + m^{(i+1)} z^{(i+1)}}{M + m^{(i+1)}}$$

bar (5. 6. 7.).

10) Iſt daher für i Kräfte die Totalkraft M, die ihnen ſubſtituirt werden kann = der Summe aller einzelnen, ſo gilt dies auch für i + 1 Kräfte; und was die Lage des Punktes betrifft, auf den ſie wirkt, ſo iſt klar, daß wenn $MX = mx + m'x' \ldots + m^{(i)} x^{(i)}$, auch eben dies Geſetz für X' gelten werde, indem $M'X' = MX + m^{(i+1)} x^{(i+1)}$ iſt. Ein Gleiches gilt auch für die andern Coordinaten dieſes Punktes.

11) Dies Geſetz, ſowohl in Anſehung der Größe der Kraft, als der Lage des Punktes auf den ſie anzubringen iſt, erſtreckt ſich alſo auf i + 1 Kräfte, wenn es für i Kräfte ſtatt findet. Von zweyen Kräften iſt es aber (5. 6. 7.) erwieſen, alſo iſt es für jede willkührliche Anzahl von Kräften wahr.

12) Man kann daher, ohne das Gleichgewicht zu ſtören, einer Anzahl von i Kräften allemal die Summe derſelben in einem einzigen Punkte nach gleicher Richtung ſubſtituiren, der zu Coordinaten

$$X = \frac{mx + m'x' \ldots + m^{(i)} x^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}},$$

$$Y = \frac{my + m'y' \ldots + m^{(i)} y^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}}, \text{ und}$$

$$Z = \frac{mz + m'z' \ldots + m^{(i)} z^{(i)}}{m + m' \ldots + m^{(i)}} \text{ hat.}$$

13) Hat man auf ſolche Art alle Kräfte des Syſtems in eine zuſammengebracht, ſo muß dieſe allein

der Gegenkraft das Gleichgewicht halten. Dies kann aber nicht anders geſchehen, als wenn beyde gleich groß ſind, und in entgegengeſetzter Richtung auf einerley Punkt wirken. Die Gegenkraft muß daher = der Summe aller Kräfte des Syſtems ſeyn, und eine ihnen entgegengeſetzte Richtung haben. Iſt außerdem G der geſuchte Punkt, auf den ſie angebracht werden muß, und AD, DF, FG deſſen Coordinaten, ſo hat man

$$AD=\frac{mx+m'x'+m''x''+..}{m+m'+m''+..}, DF=\frac{my+m'y'+..}{m+m'+..},$$

$$FG=\frac{mz+m'z'+..}{m+m'+..}$$

§. 75.

Dieſer Punkt G hat alſo die Eigenſchaft, daß die Summe aller einzelnen parallelen Kräfte des Syſtems auf ihn nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihnen allen das Gleichgewicht hält. Aus der Art wie ſeine Lage beſtimmt iſt, könnte man ſchließen, daß er von der Richtung der Kräfte abhänge, weil die Ebene, auf welche die Coordinaten ſich beziehen, ſenkrecht auf dieſe Richtung genommen iſt, folglich eine andere Richtung der Kräfte, andere Coordinaten für die Punkte des Syſtems hervorbringt. Es entſteht alſo die Frage, ob die Richtung der Kräfte auf die Lage des Punktes G Einfluß hat? Um einzuſehen, daß dies nicht der Fall ſey, darf man nur darauf zurückgehen, wie der Punkt gefunden iſt. Wir ſuchten erſt von zweyen Punkten des Syſtems Z, Z' den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt.

Dieſer fällt an einen beſtimmten Ort ζ zwiſchen die beyden Punkte, die Richtung der Kräfte mag ſeyn, welche ſie will; und ſo ſind auch die folgenden Punkte, in denen nach und nach mehrere Kräfte des Syſtems vereinigt wurden, durchaus beſtimmt. Da man nun nach Verbindung aller Kräfte des Syſtems endlich einen Punkt erhält, der mit G zuſammenfallen muß, ſo folgt, daß auch G unwandelbar, und von der Richtung der Kräfte ganz unabhängig ſey.

§. 76.

Die Betrachtung des Syſtems paralleler Kräfte findet ihre Anwendung bey allen feſten Körpern, in ſo fern ſie der Wirkung der Schwere unterworfen ſind. Dieſe Kraft wirkt nemlich in jedes Element des Körpers, denn ſie äußert ſich noch in dem kleinſten Theilchen, das man vom Körper trennt: alſo ſieht man offenbar, daß ſein Gewicht aus der Zuſammenwirkung aller einzelnen Gewichte ſeiner Elemente entſtehe, und daß er folglich als ein Syſtem von lauter parallelen Kräften anzuſehen ſey. Daher giebt es in jedem feſten Körper einen Punkt, worauf eine Kraft nach vertikaler Richtung angebracht werden kann, die ihm das Gleichgewicht zu halten im Stande iſt. Dieſen Punkt nennt man den **Schwerpunkt** des Körpers.

§. 77.

Folgerung 1. Das Gewicht des Körpers iſt ein Compoſitum aus den Gewichten aller ſeiner Theile; man kann aber dafür eine ihm gleiche Kraft in ſeinem

...nkte als äquipollent ſubſtituiren, oder das ... ſelbſt als eine einfache Kraft betrachten, die ... den Schwerpunkt nach vertikaler Richtung wirkt.

2. Der Körper bleibt in Ruhe, oder ſeine Kraft zu ſinken wird im Gleichgewichte erhalten, wenn ſein Schwerpunkt durch eine vertikale Kraft unterſtützt wird, die ſeinem ganzen Gewichte gleich iſt. Dieſe Kraft kann entweder von unten hinauf wirken, oder durch einen Faden aufwärts ziehen, der im Schwerpunkte, oder in jedem andern Punkte der Vertikale, die durch den Schwerpunkt geht, befeſtigt iſt.

3. Man kann auch den Körper auf einer feſten Unterlage ruhen laſſen; alsdann wird dieſe von ſeinem ganzen Gewichte gedrückt, und der Schwerpunkt leidet dadurch einen gleichen und entgegengeſetzten Druck.

Spezifiſches Gewicht der Körper.

§. 78.

Es giebt keinen Körper, in dem die Theile ſo innig mit einander verbunden wären, daß ſie ſich von allen Seiten genau berührten, oder, wie die Theile des geometriſchen Körpers, ein Continuum bildeten. Sie laſſen bald größere bald geringere Zwiſchenräume zwiſchen ſich, je nachdem ihre Struktur anders iſt, und geben dadurch dem Körper eine Ausdehnung, die er mit ſeiner Maſſe nur zum Theil ausfüllt. Dies macht, daß ... eine Körper bey eben dem Volumen mehr wiegt, als andere.

...r wiegen muß; es
... = u in Cubikfußen
Gu.
... Ein eichener Balken
... Seite seines Querschnittes
... fuß von diesem Holze wiege
... = $\frac{50}{12}$, und G = 60 ℔;
... Balken Gu = 250 ℔.

§. 80.

Dies Gewicht für die Einheit des V
... Körpern von verschiedener Art u
... daher für jede besondere Materie b
... werden; man nennt es das eige
... **spezifische Gewicht** der Körper.

Da das Gewichtsmaaß, dessen man
... bedient, so wie die Einheit des Vol
... körperliche Dinge sind, so kann man auch da
... Gewicht irgend einer Materie, z. B. des
... ers = 1 setzen, und darauf das von ande

beziehen, wobey aber alsdann in der Ausübung eine Reduktion auf übliche Maaße erforderlich ist, die so geschieht:

Das spezifische Gewicht einer Materie sey $= \pi$, das des Wassers $= 1$ gesetzt; das Gewicht eines Pariser Cubikfußes von dieser Materie $= G$; so hat man, da nach Brisson der Cubikfuß Wasser 70 ℔ wiegt: $1 : \pi = 70$ ℔ $: G$, also $G = 70\,\pi$ in Pfunden.

§. 81.

Bey einem Körper, der nicht gleichförmig dicht ist, fällt der Begriff vom spezifischen Gewichte eigentlich weg. Ist jedoch die Verschiedenheit in der Dichte seiner Theile nicht sehr groß, so kann man sie in den meisten Fällen als homogen ansehen, und dem ganzen Körper ein mittleres spezifisches Gewicht beylegen. So z. B. fand Muschenbroek von dem Stamme einer alten Eiche

das spezifische Gewicht des Splintes $= 1{,}039$
des innern Holzes $= 1{,}076$
des Markes $= 1{,}116$

Dies Dreyes zusammen genommen, und durch 3 dividirt, gäbe das mittlere Gewicht des ganzen Stammes $= 1{,}077$.

§. 82.

In vielen Körpern giebt es außer den unbemerkbaren Zwischenräumen noch andere des Gewebes und der Crystallisation, wodurch sie lockerer und folglich spezifisch leichter werden, als ihre kleinern Theile es ei-

gentlich ſind. So z. B. ſinken Sägeſpäne von manchem Holze, das auf dem Waſſer ſchwimmt, in demſelben nieder; Kreide, Zucker u. a. ſind im Stücke ſpezifiſch leichter, als wenn ſie zu Pulver zerſtoßen werden.

Solche gröberen Poren finden ſich ſelbſt bey Körpern, an denen man ſie nicht unmittelbar wahrnimmt: die meiſten Metalle werden durch den Hammer merklich verdichtet, ſo daß man bey der Angabe ihres ſpezifiſchen Gewichtes wohl darauf zu ſehen hat, ob ſie geſchlagen oder bloß gegoſſen ſind. Nach Briſſon iſt z. B. das ſpezifiſche Gewicht

des gegoſſenen Silbers	=	10,4743
des geprägten	=	10,5107
des Gußeiſens	=	7,2070
des Stangeneiſens	=	7,7879.

Schwerpunkt homogener Körper.

§. 83.

Bey der Anwendung der §. 74. gefundenen Formeln, die zur Beſtimmung des Schwerpunktes im Körper dienen, bedeuten m, m′, m″ die Gewichte der einzelnen Elemente des Körpers. Eigentlich müßte man nun hiezu die kleinſten materiellen Theile nehmen, wie ſie, durch Zwiſchenräume zerſtreut, im Körper nebeneinander liegen. Dieſe kennen wir aber nicht; alſo iſt ein ſolches Verfahren nicht gedenkbar. Die Eigenſchaft homogener Körper, daß jedes Stück ein, ſeinem Volumen proportionales Gewicht hat, berechtigt uns ſtatt

deſſen, den Körper als ein ſtetiges Ganze anzuſehen, worinn allenthalben Theile anzutreffen ſind, die von einer größern oder geringern Schwere getrieben werden, je nachdem das ſpezifiſche Gewicht des Körpers beſchaffen iſt.

Man ſetze das Gewicht eines homogenen Körpers für das Volumen 1, $= p$, ſo iſt das Gewicht eines Theiles von der Größe $m = mp$, das man in den erwähnten Formeln für m ſetzen müßte. Der Faktor p kommt aber ſodann im Zähler und Nenner vor, und fällt alſo, wenn mit ihm dividirt wird, ganz hinaus. Man kann daher $p = 1$ ſetzen, oder Raum und Gewicht miteinander verwechſeln.

§. 84.

Die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z gehen durch den ſtetigen Körper in unendlich kleinen Aenderungen dx, dy, dz fort, und die Elemente m, m' u. ſ. f. in die der Körper dadurch abgetheilt wird, ſind rechtwinklichte Parallellepipeda, deren Inhalt $= dxdydz$ iſt, den wir dM nennen wollen. Die Summe aller dieſer dM iſt $= M =$ der Maſſe oder dem Inhalte des ganzen Körpers; ferner iſt die Summe aller Produkte $mx = \int xdm$, und ſo auch bey den übrigen. Heißen alſo a, b, c die Coordinaten AD, DF, FG, die den Schwerpunkt G des Körpers beſtimmen, ſo hat man

$$= \frac{\int xdM}{M}, \quad b = \frac{\int ydM}{M}, \quad c = \frac{\int zdM}{M}.$$

§. 85.

Fig. 16. Der Schwerpunkt einer ebenen Fläche von unendlich geringer Dicke fällt in dieſelbe hinein, denn man nehme ſie zur Ebene der Coordinaten x und y an; ſo iſt $z = o$, alſo auch $c = \frac{\int z dM}{M} = o$. Es bleiben alſo hier für den Schwerpunkt bloß die Coordinaten $AD = a$, und $DG = b$ zu beſtimmen übrig; außerdem iſt jetzt $dM = dxdy$, folglich $a = \frac{\iint x dxdy}{\iint dxdy}$, und $b = \frac{\iint y dxdy}{\iint dxdy}$. Man ſummire nun zuerſt die Differenzialgrößen längs Xy, indem man x als beſtändig annimmt, ſo wird $\iint dxdy = \int ydx$, $\int xdxdy = \int yxdx$, und bis $XY = Y$ genommen, erſteres Integral $= \int Ydx$, letzteres $= \int Yxdx$, mithin $a = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$; und eben ſo erhält man $b = \frac{\int Y^2 dx}{2\int Ydx}$

Exempel. Es ſey die Fläche AOS der Quadrant eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer $= f$, ſo hat man

$$Y^2 = 2fx - x^2$$
$$YdY = fdx - xdx$$
$$Y^2 dY = fYdx - Yxdx$$

folglich $\int Yxdx = f . \int Ydx - \frac{1}{3} Y^3$, und daher $\frac{\int Yxdx}{\int ydx} = f - \frac{Y^3}{3\int Ydx}$. Setzt man nun $x = f$, ſo wird auch $Y = f$, und $\int Ydx$, als der Inhalt des Quadranten, $= \frac{1}{4}\pi f^2$, folglich

$a = f$

$$a = f - \frac{4f}{3\pi} = 0{,}5755868184\ldots f.$$

Ferner ist $Y^2dx = 2fxdx - x^2dx$, also $\int Y^2dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, welches $= \frac{2}{3}f^3$ wird, wenn man $x = f$ setzt. Demnach ist $b = \frac{4f}{3\pi}$, und folglich $a + b = f$, wie auch seyn muß: denn nimmt man SO zur Abscissenlinie an, so ist alles wie vorhin, und man erhält daher $DO = b$.

Anmerkung. Wenn auf beyden Seiten der Abscissenlinie Theile der Fläche liegen, so sind die y des entgegengesetzten Theiles negativ. Man muß sich aber hüten, dies unmittelbar auf die Formeln für a und b anzuwenden: denn das Element $DM = dxdy$ ist allemal positiv; also, wenn y negativ ist, auch $\iint ydxdy = \int Y^2dx$ negativ, statt daß es, nach dem Quadrate Y^2 zu urtheilen, positiv seyn müßte. Dagegen ist $\iint xdxdy = \int Yxd$ allemal positiv, wofern x positiv ist. Wenn daher die Abscissenlinie AP, die Fläche MAN in gleiche und ähnliche Theile theilt, so ist jedesmal ein Y^2dx dem ihm gleichen auf der andern Seite entgegengesetzt, folglich die Summe aller $Y^2dx = o$, mithin auch $b = o$. Der Schwerpunkt fällt alsdann in den Durchmesser AP, und seine Entfernung a vom Scheitel A ist $= \frac{2\int Yxdx}{2\int Ydx} = \frac{\int Yxdx}{\int Ydx}$.

§. 86.

Fig. 17. Der Schwerpunkt eines Dreyecks fällt in die Linie CD, welche aus der Spitze C gezogen, die Grundlinie AB halbirt: denn zieht man MN mit AB parallel, so wird auch diese von ihr halbirt, also liegt in ihr der Schwerpunkt des unendlich schmalen Streifes MNmn; folglich, weil dies von allen solchen Streifen gilt, in die das Dreyeck sich theilen läßt, auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt G aller, oder der des gan-

gen Dreiecks. Man kann daher die Linie CD so betrachten, als sey sie in allen ihren Punkten mit den Gewichten der dadurch gehenden Streifen belastet.

Es sey nun CD = f, CG = a, CI = x, der Inhalt des ganzen Dreieckes = A, der des Theiles MCN = S, so ist das Stück MNmn = dS, also $Aa = \int x dS$: aber $S = \frac{Ax^2}{f^2}$, folglich $dS = \frac{2Axdx}{f^2}$, mithin $\int x dS = \frac{2A}{f^2} \cdot \int x^2 dx = \frac{2Ax^3}{3f^2}$, welches $x = f$ gesetzt, $Aa = \frac{2}{3} Af$, oder $a = \frac{2}{3} f$ giebt.

Der Schwerpunkt des Dreyecks liegt also in der Linie CD um $\frac{2}{3}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt.

§. 87.

Fällt man daher aus C und G auf die Grundlinie die Perpendikel CO und HG, und zieht GI der Grundlinie parallel, so hat man, wenn AO = g, OC = h, und AB = b gesetzt wird: $CI = \frac{2}{3} h$, also $GH = IO = \frac{1}{3} h$, und $DH = \frac{1}{3} DO = \frac{1}{3} (g - \frac{1}{2} b)$, folglich $AH = \frac{1}{2} b + \frac{1}{3} (g - \frac{1}{2} b) = \frac{1}{3} (b + g)$.

Für das gleichschenklichte Dreyeck ist $g = \frac{1}{2} b$, also $AH = \frac{1}{2} b$. Beym rechtwinklichten Dreyecke AOB ist $g = b$, also $AH = \frac{2}{3} b$, wie auch seyn muß, weil $HO = \frac{1}{3} b$ wird, wenn man AO als seine Höhe ansieht.

§. 88.

Wenn zwey Körper so mit einander verbunden sind, daß sie ein festes Ganze ausmachen, so findet man

deſſen Schwerpunkt folgendermaßen: Man ſuche die Schwerpunkte A und B der beyden Körper einzeln, und ſehe eines jeden Gewicht in dem ſeinigen als vereinigt an; alsdann läßt ſich der gemeinſchaftliche Schwerpunkt C der Punkte A und B in der geraden Linie AB nach §. 17. beſtimmen. Heißen nemlich P und Q die Gewichte der beyden Körper, ſo iſt $AC = \frac{Q \cdot AB}{P+Q}$.

Gegenſeitig leitet dies auf ein Verfahren, den Schwerpunkt eines Körpers zu finden, der als Theil eines Ganzen anzuſehen iſt, deſſen Schwerpunkt man bereits kennt, z. B.

Man ſucht den Schwerpunkt G des Trapeziums MNAB.

Da daſſelbe durch Wegnahme des ΔMEN vom ΔACB entſteht, und beyder Schwerpunkte in die Linie CD fallen, ſo muß auch G in dieſe Linie fallen. Setzt man alſo $CD = f$, $CI = g$, $CG = x$, den Inhalt des $\Delta ACB = F$, den des $\Delta MCN = G$, ſo hat man (§. 30.) $\frac{2}{3} Gg + x(F-G) = \frac{2}{3} Ff$, alſo $x = \frac{2}{3} \frac{(Ff - Gg)}{F-G}$. Man nenne nun $AB = a$, $MN = b$, und $ID = c$, ſo iſt:

$f:g = a:b$; $F:G = a^2:b^2$; $Ff:Gg = a^3:b^3$, folglich

$c = f - g = \frac{(a-b)f}{a}$, $F - G = \frac{(a^2 - b^2)F}{a^2}$,

$Ff - Gg = \frac{(a^3 - b^3)Ff}{a^3}$. Dies giebt $x = \frac{2}{3}$

$\frac{f(a^3 - b^3)}{a(a^2 - b^2)} = \frac{2}{3} f\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 + ab}\right)$, und $DG = f - x = \frac{1}{3} f\left(\frac{a^2 + ab - 2b^2}{a^2 + ab}\right)$. Wird nun für f sein Werth $\frac{ac}{a - b}$ gesetzt so bekommt man $DG = \frac{1}{3} c$.

$$\frac{a^2 + ab - 2b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{3} c \left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$$

In dieser Formel bedeutet c die Länge der Linie, welche durch die Mitte der beyden parallelen Seiten geht; beym senkrechten Trapezium ist dies seine Höhe.

§. 89.

In jedem Körper, dessen Oberfläche ein stetiges Ganze ausmacht, giebt es eine zusammenhängende Linie, in welcher die Schwerpunkte aller seiner Querschnitte liegen, die aber zugleich auf ihr senkrecht seyn müssen. Sie heißt die centrische Linie des Körpers. Um sie zu finden, darf man, wegen letzterer Bedingung, den Körper nicht in willkührliche Querschnitte abtheilen, daher ihre Angabe oft Schwierigkeiten unterworfen seyn kann. Hat man sie aber einmal bestimmt, so kann man den Körper, in so fern er schwer ist, sich unter dieser Linie vorstellen, indem man in ihren Punkten die Gewichte der durch sie gehenden Querschnitte als vereinigt ansieht, und der Schwerpunkt der centrischen Linie ist alsdann auch zugleich der des Körpers.

§. 90.

Der Schwerpunkt einer Linie, deren Elemente verschiedenes Gewicht haben, läßt sich nun so finden:

§. 15. 1) Man nehme eine Ebene nach Gefallen an, und bestimme die Punkte Z der Curbe durch die drey rechtwinklichten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, so sind y und z Funktionen von x.

2) Das Element bey Z setze man $= ds$, sein Gewicht $= pds$, so ist auch p von x abhängig, und man hat nach §. 83.

$a = \frac{\int xpds}{\int pds}$, $b = \frac{\int ypds}{\int pds}$, $c = \frac{\int zpds}{\int pds}$ für die drey Coordinaten AD, DF, FG des Schwerpunktes G dieser Curbe.

3) Sind die Querschnitte des Körpers gleich groß, so fällt auf jeden Punkt der centrischen Linie gleiches Gewicht, und alsdann ist p eine beständige Größe, folglich

$a = \frac{\int xds}{s}$, $b = \frac{\int yds}{s}$, $c = \frac{\int zds}{s}$

4) Ist die Linie von einfacher Krümmung, d. i. fällt sie ganz in eine Ebene, so nehme man in dieser die beyden Coordinaten x und y an, wodurch $z = o$, also auch $c = o$ wird. Der Schwerpunkt fällt nemlich alsdann in dieselbe Ebene hinein.

Exempel. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden. Man setze den Halbmesser des Kreises $= f$, die Sehne des Bogens $= c$, ihre Entfernung vom Mittelpunkte $= g$, und nehme den Punkt A in ihrer Mitte an, so hebt sich jedes Paar xds für gleiche und entgegengesetzte x, also ist $\int xds = o$, folglich

auch $a = o$. d. h. der Schwerpunkt des Bogens fäl in den Halbmeſſer, der die Sehne halbirt.

Man ziehe ferner aus dem Mittelpunkte mit d Sehne eine Parallele, und nehme auf dieſer die Abſci ſen x, ſo iſt das zu jedem x gehörige $Y = g + y$, ur $Y^2 = f^2 - x^2$, woraus $ds = \frac{fdx}{Y}$ folgt. Dies giel alſo $fdx = Yds = (g+y)\,ds$, und $yds = fdx - gds$, folglich $\int yds = fx - gs$. Hierin $x = c$ geſet wegen der Verdopplung der Summe durch beyde Sei ten, erhält man für s die Länge des ganzen Bogen und $b = \frac{cf}{s} - g$, alſo die Entfernung des geſuchte Schwerpunktes vom Mittelpunkte $= b + g = \frac{cf}{s}$.

Für den halben Kreis iſt dieſe Entfernung = $\frac{2f}{\pi} = 0{,}636619772\ldots f$.

§. 91.

Oft verſteht man unter centriſcher Linie auch di jenige, welche durch die Schwerpunkte paralleler Qu ſchnitte geht, in die man den ganzen Körper einthei Alsdann iſt die Vorſtellung von ihr einfacher, und gilt noch eben das, was vorhin geſagt iſt: ſie vereini das ganze Gewicht des Körpers in ſich, und hat n ihm einerley Schwerpunkt.

§. 92.

Die centriſche Linie eines Prisma's iſt offenk

eine gerade Linie; denn sie wird durch den Schwerpunkt seiner Grundfläche beschrieben, die man an einer der Seitenflächen des Prisma's parallel hinunter bewegt, und die auf solche Art nach und nach in die übrigen, ihr parallelen, Querschnitte zu liegen kommt. Man erhält sie also, wenn man die Schwerpunkte der beyden parallelen Grundflächen des Prisma's zusammenzieht.

Beym geraden Prisma erfüllt sie zugleich die Bedingung des §. 88.

Da die parallelen Querschnitte des Prisma's gleich groß sind, so ist die centrische Linie desselben in allen Punkten mit gleichen Gewichten beschwert, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt also in ihre Mitte fällt. **Daher liegt der Schwerpunkt eines Prisma's in der Mitte seiner centrischen Linie.**

§. 93.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Pyramide zu finden.

Aufl. 1. Die centrische Linie der Pyramide ist ebenfalls gerade, und geht durch die Spitze derselben und den Schwerpunkt der Grundfläche; denn da die der Grundfläche parallelen Querschnitte ähnlich sind, so haben ihre Schwerpunkte [illegible] Lagen [illegible], wodurch sie in eine gerade Linie zu liegen kommen.

2. [illegible] Construction leicht finden läßt [illegible] Stück von ihr = x [illegible] stückes, wozu dies gehört = [illegible]

zunächſt liegenden Querſchnittes von unendlich geringer Dicke $= dP$. Heißt alſo nun noch F der Inhalt der ganzen Pyramide, a die Entfernung des Schwerpunktes in der centriſchen Linie von der Spitze, ſo hat man

$Fa = \int x dP$.

3) Nun iſt $F : P = f^3 : x^3$, alſo $P = \frac{Fx^3}{f^3}$, $dP = \frac{3Fx^2}{f^3}$, und $\int x dP = \frac{3F}{f^3} \cdot \int x^3 dx = \frac{3Fx^4}{4f^3}$, das für $x = f$ den Werth $\frac{3}{4}$ Ff bekommt. Man hat daher: $Fa = \frac{3}{4}$ Ff oder $a = \frac{3}{4}$ f.

4) **Der Schwerpunkt der Pyramide liegt alſo in der centriſchen Linie um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt.**

§. 94.

Demnach iſt auch die centriſche Linie einer abgekürzten Pyramide gerade, und es iſt leicht, in ihr den Schwerpunkt derſelben zu finden. Heißen nemlich die Längen der centriſchen Linie für die ganze Pyramide, und das fehlende obere Pyramidenſtück f und g, ihre Inhalte F und G, ihre Grundflächen, wodurch das abgekürzte Stück begrenzt wird, B und S, und endlich die Entfernung ſeines Schwerpunktes von der Spitze x, ſo hat man nach §.

$\frac{3}{4} Gg + x(F - G) = \frac{3}{4} Ff$, alſo $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{Ff - Gg}{F - G}$.

Da nun $f : g = B^{\frac{1}{2}} : S^{\frac{1}{2}}$, $F : G = B^{\frac{1}{2}} : S^{\frac{1}{2}}$, und $Ff = Gg = B^2 : S^2$ ſo wird $x = \frac{3}{4} f \frac{B^2 - S^2}{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}}) \cdot \sqrt{B}}$.

Man nenne c die Länge der centriſchen Linie innerhalb der beyden Grundflächen, ſo iſt $c = f - g = f \cdot \frac{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}{B^{\frac{1}{2}}}$, und $f = \frac{B^{\frac{1}{2}} c}{B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}}}$, folglich $x = \frac{3}{4} c \cdot \frac{(B^2 - S^2)}{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, und die Entfernung des Schwerpunktes vom Schwerpunkte der untern Baſis $= f - x = \frac{1}{4} c \cdot \frac{B^2 - 4B^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} + 3S^2}{(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})}$, oder wenn man mit $(B^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})^2$ dividirt, $= \frac{1}{4} c \cdot \frac{B + 3S + 2\sqrt{BS}}{B + S + \sqrt{BS}}$

§. 95.

Lehrſatz. **Bey ebenen Figuren oder Körpern, welche einen Mittelpunkt, d. i. einen Punkt von ſolcher Beſchaffenheit enthalten, daß allemal zwey entgegengeſetzte Radien, die von ihm aus nach dem Umfange, oder beym Körper, bis zur Oberfläche gehen, einander gleich ſind, fällt der Schwerpunkt in dieſen Mittelpunkt hinein.**

Fig. 18. **Beweis** 1) Es ſey MSN der Umfang einer ſolchen Figur, C ihr Mittelpunkt; man ziehe durch C die gerade Linie MCN, und eine andere mCn ihr unendlich nahe, ſo iſt der Vorausſetzung nach, CM = CN, Cm = Cn, und die Dreyecke CMm, CNn ſind alſo congruent.

2) Die centriſche Linie des ΔMCm halbirt ſeine Grundlinie in O, und fällt daher mit der des ΔCNn zuſammen, weil ſie verlängert auch Nn halbirt.

3) Nun seyen G und g die Schwerpunkte der beyden Dreyecke, so hat man $CG = \frac{2}{3} CO$, $Cg = \frac{2}{3} Co$, also, weil $CO = Co$ ist, auch $CG = Cg$; mithin sind in gleichen Entfernungen von C gleiche Gewichte befindlich, und C ist folglich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt.

4) Eben dies gilt so von jedem Paare solcher entgegengesetzten Dreyecke, in die sich die ganze Figur theilen läßt; also fällt auch der Schwerpunkt der ganzen Figur in C.

5) Beym Körper ziehe man aus dem Mittelpunkte C vier solcher unendlich nahe liegenden Radien, und verlängere sie nach entgegengesetzten Richtungen über C hinaus, so entstehen dadurch zwey gleiche und ähnliche Pyramiden in entgegengesetzter Lage, deren centrische Linien also in Eine durch C gehende Linie zusammenfallen, und von gleicher Länge sind.

6) In diesen liegen die Schwerpunkte der Pyramiden gleich weit von C entfernt (§. 92.), und haben folglich in C ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Da nun der ganze Körper in solche einander entgegenliegende Pyramiden sich theilen läßt, so folgt, daß dessen Schwerpunkt ebenfalls in C hineinfalle.

§. 96.

Folg. 1. Zu den ebenen Figuren der Art gehören: das reguläre Vieleck; das Parallellogram, dessen Schwerpunkt deshalb in den Durchschnitt der beyden Diagonalen fällt; der Kreis, die Ellipse u. a. m.

2. Die centrische Linie des Cylinders geht daher durch die Mittelpunkte seiner Grundflächen, und da er zu den prismatischen Körpern gehört, so liegt sein Schwerpunkt in der Mitte derselben.

3. Eben so geht die centrische Linie des schiefen sowohl als geraden Kegels durch dessen Spitze und den Mittelpunkt seiner Grundfläche, und sein Schwerpunkt liegt in ihr um $\frac{1}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt. Beym geraden Kegel ist die centrische Linie also mit der Höhe oder Axe einerley.

4. Zu den Körpern, die einen Mittelpunkt haben, gehört die Kugel, und das elliptische Sphäroid.

§. 97.

Fig. 19. Ueberhaupt ist bey allen runden Körpern, d. h. solchen, die durch Umdrehung einer Fläche AMSX um ihre Axe AX entstehen, die Axe zugleich die centrische Linie derselben. Denn jeder auf die Axe senkrechte Querschnitt des Körpers ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt.

Man setze daher die rechtwinklichten Coordinaten AP und PM, wodurch die Beschaffenheit der Linie AMS bestimmt wird, $= x$ und y, so ist das Element des Körpers, welches von den beyden unendlich naheliegenden Querschnitten, die durch P und p gehen, begrenzt wird, und die Dicke $Pp = dx$ hat, $= \pi y^2 dx$, und man folglich, wenn die Entfernung AG des Schwerpunktes vom Scheitel $= a$ gesetzt wird: $a = \frac{\int \pi x^2 dx}{\int \pi y^2 dx} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, wo sowohl im Integrale des

Zählers als des Nenners $x =$ der ganzen Länge der Axe oder centrischen Linie gesetzt werden muß.

Z. E. Es sey der Körper ein Kugelsegment von der Höhe $AX = h$, und der Halbmesser der Kugel $= f$, so ist:

$y^2 = 2fx - x^2$, folglich $\int y^2 dx = fx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und $\int y^2 x dx = \frac{2}{3} fx^3 - \frac{1}{4} x^4$, und daher für $x = h$, $a = \frac{8fh - 3h^2}{12f - 4h}$. Für die Halbkugel ist $h = f$, also $a = \frac{5}{8} f$.

Die Wage.

§. 98.

Um zu erfahren, wie viel ein Körper wiege, darf man nur bekannte Gewichte, oder auch andere Kräfte, die man kennt, mit ihm ins Gleichgewicht bringen, und das kann auf sehr mannigfaltige Art geschehen. Beyspiele davon geben außer dem gemeinen Hebel, Lamberts schwere Ebene *), die Federwaage, der von Ludlam angegebene Winkelhebel **) u. a. m. Unter allen diesen behält aber doch immer der Hebel wegen seiner Einfachheit den Vorzug, und ist deshalb als Werkzeug zum Abwiegen allgemein aufgenommen. Man kann durch ihn, wie man will, entweder Genauigkeit in Bestimmung des Gewichts erlangen, oder, wie dies von der Schnellwage §. 36. gezeigt ist, den Vortheil, daß

*) S. Acta Helvetica Tom. 3.

**) Phil. Transact. Vol. 55.

man bey größen Laſten mit geringern Gewichten ausreicht. Beyde Zwecke ſind von entgegengeſetzter Art, und laſſen ſich nicht zu gleicher Zeit erfüllen: denn um aus dem kleinern Gewichte auf das größere zu ſchließen, muß man es multipliciren, wodurch ein an ſich unbemerkbarer Fehler, den man beym Abwiegen begeht, zu einer beträchtlichen Größe anwachſen kann. Man würde alſo, wo Genauigkeit das Haupterforderniß iſt, die Schnellwage umkehren, und zur Beſtimmung einer Laſt, ein noch größeres Gewicht anwenden müſſen; aber dies Verfahren, außerdem daß es manche Unbequemlichkeiten haben würde, könnte doch ſelbſt auch wegen der Eintheilung des kleinern Armes neue Fehler veranlaſſen. Man wählt daher zwiſchen beyden Einrichtungen das Mittel, und nimmt die Hebelarme gleich lang, wodurch die ſogenannte **Wage** entſteht. Jeder kennt dies Inſtrument, alſo iſt ſeine Beſchreibung unnöthig, und wir können uns hier darauf einſchränken zu beſtimmen, was die Erforderniſſe ſeiner Vollkommenheit ſind, und wie ſich dieſe erreichen laſſen.

§. 99.

Ein gleicharmiger Wagebalken, deſſen Schwerpunkt in ſeine Axe fällt, wird in jeder Lage bey gleichen Gewichten ruhen (§. 58.), alſo iſt ſeine horizontale Lage kein ausſchließendes Zeichen des Gleichgewichts. Aus eben dem Grunde kann er auch bey keiner Lage in he treten, wenn die Gewichte ungleich ſind, und ſich daher in dem Falle ſo lange drehen, bis er ver-

tikal zu ſtehen kommt. Da dies das Abwiegen ſehr beſchwerlich machen würde, ſo muß man nothwendig den Wagebalken ſo einrichten, daß er für ungleiche Gewichte dennoch in irgend einer ſchiefen Lage ſtehen bleibt, und folglich nur in dem einen Falle die Gewichte gleich ſeyn können, wenn er ſich horizontal ſtellt.

§. 100.

Fig. 20. Es ſey O der Ruhepunkt des Wagebalken, g ſein Schwerpunkt; in jedem der Punkte A und B, die in einer Horizontale AB liegen ſollen, hänge ein gleich großes Gewicht p vermittelſt zweyer Schaalen, deren Gewichte wir = m und n ſetzen wollen. Das Gewicht des Balken ſey = G, und wenn man OC und gl auf AB ſenkrecht zieht, CG = lg macht; OG = f, Gg = Cl = g. Der einfache Hebel, an dem dieſe Kräfte einander das Gleichgewicht halten, iſt ſodann als ein Winkelhebel AOB anzuſehen, und da ihre ſenkrechten Entfernungen vom Ruhepunkte AC, BC und Cf ſind, ſo hat man

$$(p+m)\,AC = (p+n)\,BC + Gg, \text{ folglich}$$
$$p\,(AC-BC) = n\,.\,BC - m\,AC + Gg.$$

Da dieſe Gleichung für jedes p ſtatt finden ſoll, ſo muß jede Seite für ſich = o ſeyn, alſo wird

$$p\,(AC-BC) = o \text{ und}$$
$$n\,.\,BC - m\,.\,AC + Gg = o$$

Erſtere Gleichung giebt AC = BC, woraus erhellet, daß nur die gleicharmige Waage für gleiche angehängte Gewichte bey horizontaler Lage in Ruhe ſeyn kann.

Aus der andern Gleichung erhält man:

$$mAC = nBC + Gg$$

also müssen die Gewichte der Schalen so beschaffen seyn, daß sich die Wage auch dann horizontal stellt, wenn sie mit gar keinen Gewichten beschwert ist.

Fällt daher der Schwerpunkt g in G, oder mit dem Aufhängepunkte in einerley Vertikale, so hat man $g = o$, folglich $m = n$.

§. 101.

Die erste Bedingung bey einer Wage ist also die, daß sie gleicharmig seyn muß, d. h. daß ein Perpendikel aus dem Ruhepunkte O auf die Linie AB durch die Aufhängepunkte gezogen, diese halbiren muß. Es können nemlich nur alsdann zwey gleiche Gewichte bey horizontaler Lage der Linie AB einander aufwiegen. Um genau zu wissen, wann der Wagebalken horizontal liegt, hat man die Zunge auf ihn angebracht, die auf AB senkrecht seyn muß, weil man unter dem Wagebalken, wenn von seiner Lage die Rede ist, allemal die Linie AB zu verstehen hat. Da die Zunge bey horizontaler Lage des Wagebalken vertikal ist, und sich also hinter der Scheere, die ebenfalls vertikal hängt, verbirgt, so macht man bey genauen Wagen an der Stelle, wo die Spitze der Zunge durchgeht, in der Scheere eine Oeffnung. Die Zunge muß sich, wenn sie vollkommen vertikal steht, in dieser Oeffnung zeigen, und in die
en fallen, welche die Scheere ihrer Länge nach
irt.

§. 102.

Wenn die Theile AC und BC ungleich lang so heißt die Wage falsch. Man nenne p und q ungleichen Gewichte, die bey ihr, wenn sie horize ist, im Gleichgewichte stehen, so hat man: (p + AC = (q+n) BC + Gg.

Hat sie für sich, wenn sie von den Gewichten ist, horizontalen Stand, so ist m . AC = n . B Gg, und setzt man

$$m = n,\ m\,(AC - BC) = Gg.$$

also für m = o, auch Gg = o, d. i. wenn die Wage nach Wegnahme der Schalen noch horizontal seyn so muß der Schwerpunkt des Balken in die Vert OC fallen: alsdann aber kann sie nicht mehr in d Lage bleiben, sobald die Schalen angehängt we wodurch sie ihre Unrichtigkeit gleich offenbart.

§. 103.

Die Bedingungsgleichung m . AC = n . B Gg von der erstern abgezogen, läßt übrig p . AC = BC. Diese Eigenschaft der falschen Wage giebt Mittel, die ungleiche Länge ihrer Arme zu erforschen, das wahre Gewicht eines Körpers durch sie dennoc finden. Man setze nemlich, der Körper habe nach Wage das Gewicht p, wenn er in die Schale be und das Gewicht q, wenn er in die bey A gelegt n sein wahres Gewicht sey = x, so ist:

$$p \,.\, AC = x \,.\, BC \text{ und}$$
$$x \,.\, AC = q \,.\, BC$$

also $x . AC . BC = pAC^2 = q . BC^2$, folglich $AC : BC = \sqrt{q} : \sqrt{p}$; und $x^2 = pq$, oder $x = \sqrt{pq}$.

Hat man erst durch einen Versuch das Verhältniß der Arme gefunden, so hat man nachher nicht wieder nöthig, das doppelte Wiegen in beyden Schalen anzustellen. Wem es beschwerlich fallen sollte, Wurzeln auszuziehen, der könnte auch so verfahren: Man wiege den Körper durch irgend eine Sache, sie sey Gewicht, oder sonst etwas, auf; nehme ihn von der Schale weg, und lege dafür so viel Gewicht hinein, daß die Wage wieder horizontal zu stehen kommt, so ist letzteres Gewicht dem des Körpers äquipollent, und folglich mit ihm einerley.

§. 104.

Aufgabe. Bey der gleicharmigen Wage den Neigungswinkel der schiefen Lage des Wagebalken gegen die horizontale zu bestimmen, in der sie stehen bleibt, wenn zu p auf der einen Seite B noch ein Gewicht π hinzukommt.

Aufl. 1) Man betrachte jetzt die Lage von AB als schief, und $A\alpha$, $B\beta$, Oc, $g\lambda$ als die Vertikalen nach denen die Gewichte ziehen, und der Ruhepunkt widersteht. Diese machen alsdann mit den auf AB senkrechten Linien Aa, Bb, OC, gl den gesuchten Neigungswinkel, den wir λ nennen wollen.

2) Die Kraft, womit der Ruhepunkt O zurückwirkt, und die nach cO gerichtet ist, kann man auf den Punkt c reduciren, und da auf solche Weise die Ge-

wichte nach parallelen Richtungen an dem Hebel AcB ziehen, ſo würde das Gleichgewicht noch bleiben, wenn man ſie nach ſenkrechten Richtungen auf eben die Punkte anbrächte. Dieſem zu Folge hat man:

$(p+m)\,Ac=(p+\pi+n)\,Bc+G.c\lambda.$

3) Nun ſetze man $OC=h$, $AC=BC=a$, ſo iſt $Cc=h\tang I$, $l\lambda=CG\tang I=(f-h)\tang I$, folglich $Ac=a+h\tang I$, $Bc=a-h\tang I$, $c\lambda=g-f\tang I$, und daher:

$(p+m)(a+h\tang I)=(p+\pi+n)(a-h\tang I)+G(g-f\tang I)$.

4) Daraus wird

$[(2p+\pi+m+n)h+Gf]\tang I+(m-n-\pi)a=Gg$ folglich da $(m-n)a=Gg$ (§. 99.)

$$\tang I=\frac{\pi a}{(2p+\pi+m+n)h+Gf}$$

Oder, wenn man den Druck, den der Ruhepunkt leidet, $=P$ ſetzt: $\tang I=\frac{\pi a}{Ph+Gf}$

§. 105.

Folgerung. 1. Da tang I ſich wie π verhält, ſo kann dieſer Winkel nicht anders $=o$ werden, als wenn $\pi=o$ iſt, d. h. der Wagebalken kann ſich nicht anders horizontal ſtellen, als wenn beyde Gewichte gleich groß ſind, daher iſt ſeine horizontale Lage ein ausſchließendes Zeichen der Gleichheit der Gewichte.

2. Man kann gegenſeitig aus dem Winkel I den Unterſchied π der Gewichte beſtimmen, wofern man die

Werthe von a, f, h und G weiß, und dieſe laſſen ſich durch Verſuche mit Gewichten finden. Da es ſchwer hält, das Gleichgewicht ſo zu treffen, daß die Zunge völlig vertikal zu ſtehen kommt, ſo könnte dies bey Abwägungen, wo große Genauigkeit gefordert wird, von Nutzen ſeyn, indem ſich die Abweichung der Zunge von der Vertikale durch einen an der Scheere angebrachten Gradbogen ſehr genau meſſen ließe.

3. Es iſt gut, wenn die Wage für einen geringen Unterſchied der Gewichte um einen merklichen Winkel aus der horizontalen Lage weicht: denn alsdann läßt ſich dieſer Unterſchied leichter beobachten und erſetzen. Da ſich nun tang I auch wie a verhält, ſo ſieht man, daß die Wage eine deſto genauere Beſtimmung des Gewichtes zuläßt, je länger ihre Arme ſind.

4. Fällt der Schwerpunkt in den Aufhängepunkt, und dieſer zugleich in die Linie AB, ſo iſt $h = f = o$, alſo tang $I = \infty$, und $I = 90°$, d. h. die Wage ſchlägt in dieſem Falle bey der mindeſten Verſchiedenheit der Gewichte ſogleich um, und ſtellt ſich vertikal, wie ſchon §. 98. angemerkt iſt.

5. Da g in der Formel nicht vorkommt, ſo iſt es in Rückſicht des Erforderniſſes (3) einerley, ob die Arme der Wage gleich ſchwer ſind, oder nicht. Haben ſie ungleiches Gewicht, ſo müſſen nur die Schalen ſo genommen werden, daß die Gleichung $(m - n)a = Gg$ erfüllt wird, und das kann oft zweckmäßig ſeyn: weil nämlich die Gewichte gewöhnlich aus Bley beſtehen, ſo haben ſie meiſt ein weit größeres ſpecifiſches Gewicht,

als das, was man durch sie wiegt, und nehmen also viel weniger Raum ein; daher kann die Schale für sie weit kleiner seyn, als die andere, wodurch P vermindert wird.

§. 106.

Aufgabe. Wenn die Wage gleiche Gewichte trägt, und in eine schiefe Lage gebracht wird, die Kraft zu bestimmen, womit sie gehalten werden muß, um in dieser zu bleiben.

Aufl. 1) Der Wagebalken sey unter dem Winkel I inclinirt; auf OB sey die gesuchte Kraft V senkrecht angebracht, und da es bloß auf ihr Moment ankommt, so heiße dies M. Alsdann ist $M = V \cdot OB$.

2) Man setze, ein Gewicht π sey ihr äquipollent, und zerlege dies nach OB und der darauf senkrechten Richtung, so ist letzterer Theil, wenn man den Winkel $CBO = \omega$ setzt, $= \pi \operatorname{Cos}(I+\omega)$, weil die Verlängerung von OB mit der Vertikale Bβ den Winkel $I+\omega$ macht; also $V = \pi \operatorname{Cos}(I+\omega)$.

3) Demnach ist $M = OB \cdot \pi \operatorname{Cos}(I+\omega) = \pi \operatorname{Cos} I \cdot OB\,(\operatorname{Cos}\omega - \operatorname{Sin}\omega \operatorname{tang} I) = \pi \operatorname{Cos} I\,(a - h \operatorname{tang} I)$, und $\pi \cdot Bc = \frac{M}{\operatorname{Cos} I}$.

4) Da die Gewichte nach parallelen Richtungen ziehen, so kann man sie auf eben die Punkte nach senkrechten Richtungen anbringen, ohne das Gleichgewicht zu stören, also hat man:

$$(p+m)(a+h\,\text{tang}\,I) = (p+n)(a-h\,\text{tang}\,I) + G\{(g-f\,\text{tang}\,I) + \frac{M}{\text{Cos}\,I};$$

folglich $\frac{M}{\text{Cos}\,I} = (m-n)a - Gg + [(2p+m+n)h + Gf]\,\text{tang}\,I$

oder, weil $(m-n)a - Gg = o$ iſt:

$$M = (2p+m+n)h + Gf)\,\text{Sin}\,I.$$

§. 107.

Zu den Eigenſchaften einer guten Wage gehört auch die, daß ſie, wenn die Gewichte gleich ſind, dies ſo ſchnell als möglich anzeige; und dazu wird erfordert, daß alsdann ihr Beſtreben, ſich horizontal zu ſtellen, ſo groß als möglich ſey. Da nun dies Beſtreben auf dem von M beruhet, ſo ſieht man, daß die Wage ſo eingerichtet werden müſſe, daß der Ausdruck $(2p+m+n)h + Gf$ einen möglichſt gröſten Werth bekomme. Aber dies ſtreitet geradezu mit der Bedingung §. 104. 3. nach der tang I ſo groß als möglich, folglich $Ph + Gf$ ſo klein als möglich ſeyn ſoll. Man kann daher keinem dieſer beyden Requiſite völlig Genüge leiſten, wofern man nicht das eine dem andern nachſetzen will, welches doch nicht geſchehen darf, da ſie beyde gleich weſentlich ſind. Am beſten thut man alſo, wenn man die Werthe h, f und g weder zu groß noch zu klein annimmt.

§. 108.

Aus dem gefundenen Werthe für M laſſen ſich folgende Betrachtungen ziehen:

1. Fällt der Ruhepunkt über die Linie AB, so ist h positiv, also die Wage desto raſcher, je größer die Gewichte ſind, womit ſie beladen wird.

2. Iſt OC = o, ſo iſt M = Gf tang I, alſo ihr Beſtreben bey gleichen Gewichten ſich horizontal zu ſtellen, für große und kleine Gewichte gleich groß. Da die Friction die Trägheit der Wage vermehrt, und für größere Gewichte größer iſt, ſo iſt eine Wage, bey der O in AB fällt, für kleinere Gewichte brauchbarer.

3. Wenn ſowol C als G über O liegt, ſo ſind h und f beyde negativ, alſo auch M. Das heißt nun, wenn der Balken einer ſolchen Wage aus der horizontalen Lage gebracht wird, ſo hat er ein Beſtreben, ſich noch weiter davon zu entfernen, und ſich ganz herumzudrehen, bis der Ruhepunkt über die Punkte C und G zu liegen kommt. Dieſer Fehler, der durchaus nicht ſtatt finden darf, macht dergleichen Wagen ganz untauglich.

4. Iſt bloß OC negativ, ſo iſt die Wage für kleinere Gewichte brauchbar, indem dann M einen mittlern Werth bekommt, wofern Gf nicht zu klein iſt. Für größere Gewichte hingegen wird ſie träge, und kann ſelbſt zum Umſchlagen geneigt werden.

5. Iſt ſtatt deſſen OG bloß negativ, ſo iſt die Wage für Gewichte, die kleiner als $\frac{Gf}{2h}$ ſind, dem Umſchlagen ausgeſetzt; für etwas größere wird ſie träge, und für noch größere brauchbar. Man kann alſo die

Wagen so einrichten, daß sie entweder zu größeren oder kleinern Gewichten taugen.

Anmerk. Das Bisherige ist zum Theil aus Eulers Abhandlung de Bilancibus genommen, die in den Coment. Petropol. Tom. X. steht. Andere nöthige Betrachtungen über dies Instrument kommen in der Folge vor, weil sie noch weitere Vorkenntnisse voraussetzen. Wer sich mit der genauern Einrichtung desselben, und der Verfertigung seiner Theile bekannt machen will, der lese folgende Schriftsteller darüber nach:

Bülfinger, Comment. Petropol. Tom. II.
Leutmann, Comment. Petropol. Tom. X.
Kuhn, Versuche der naturforschenden Gesellschaft in Danzig Tom. I.

Stabilität der Körper auf festem Boden.

§. 109.

Die äußersten Punkte eines Körpers, womit er den horizontalen Boden berührt, auf dem er ruhet, schließen einen bestimmten Raum ein, den wir die **Basis** des Körpers nennen wollen.

Der Körper kann durch Füße oder Stützen nur in einigen Punkten den Boden berühren, alsdann erhält man den Umfang der Basis, wenn man je zwey der nächsten Berührungspunkte durch gerade Linien verbindet.

§. 110.

Wenn der Körper vermöge seiner Stellung vor dem Umschlagen gesichert ist, so muß doch irgend eine Kraft, die seitwärts auf seinen Schwerpunkt wirkt, ihn um eine der Seiten seiner Basis zu drehen im Stande seyn, wofern er nicht den Boden parallel fortrücken

kann. Dieſe Kraft, wenn ſie gerade ſo groß genommen wird, als nöthig iſt, den Widerſtand des Körpers zu überwinden, beſtimmt die Feſtigkeit ſeines Standes in Anſehung der Seite, nach der die Umdrehung geſchieht, oder, wie man ſich ausdrückt, ſeiner **Stabilität**.

§. III.

Aufgabe. Die Stabilität eines Körpers, der auf horizontalem Boden ſteht, in Rückſicht einer Seite AB ſeiner Baſis zu finden.

Fig. 21. Aufl. 1) Man fälle aus ſeinem Schwerpunkte G auf den Boden ſowohl als auf die Linie AB die Perpendikel GO und GD, und lege durch beyde eine Ebene, ſo ſchneidet dieſe die Linie AB in D ſenkrecht.

2) Wenn man daher in derſelben GI mit DO parallel zieht, und darauf das Perpendikel DI fällt, ſo ſind DO und DI ebenfalls beyde ſenkrecht auf AB.

3) Es wirke nun eine Kraft S auf den Schwerpunkt G nach der horizontalen Richtung GI, und werde durch den Körper vermöge ſeiner Stabilität im Gleichgewichte erhalten, ſo kann man dieſe auf den Punkt I anbringen, und ſie hat daſelbſt das Moment S . DI den Körper um AB zu drehen.

4) Das Gewicht des Körpers ſey P, ſo hat dies in O das Moment P . DO, den Körper nach entgegengeſetzter Seite um AB zu drehen.

5) Sollen alſo beyde Kräfte an der Axe AB im Gleichgewichte ſeyn, ſo hat man $S . DI = P . DO$ (§. 67.), alſo $S = \frac{DO}{DI} . P = \frac{DO}{GO} . P$.

6) Wäre $S > \frac{DO}{GO} . P$, so wäre das Moment $S.DI > P.DO$, und es erfolgte wirklich eine Umdrehung des Körpers nach außen zu: also ist die Kraft $\frac{DO}{GO} . P$ gerade so groß, als nöthig ist, den Widerstand des Körpers, den er der Umdrehung entgegensetzt, aufzuheben, und zeigt daher seine Stabilität an.

§. 112.

Folgerung. 1. Fällt der Punkt O innerhalb der Basis, so ist DO für jede ihrer Seiten positiv; es gehört folglich alsdann allemal eine Kraft dazu, den Körper nach irgend einer Seite umzustoßen, und er steht daher für sich fest. Da also in diesem Falle der Widerstand des Bodens dem Körper das Gleichgewicht hält, so muß dessen mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Für $DO = o$, d. h. wenn O in den Umfang der Basis fällt, ist auch $S = o$. Der Körper schlägt in diesem Falle zwar nicht um, wenn er sich selbst überlassen bleibt, er wird aber durch die mindeste Kraft, die nach der Seite, wo D liegt, auf seinen Schwerpunkt wirkt, dazu gebracht.

3. Fällt O außerhalb der Basis, so ist OD negativ; alsdann muß also der Körper gehalten werden, wenn er nicht umschlagen soll, d. i. er kann für sich seine Stellung nicht behaupten, sondern dreht sich um diejenige Kante der Basis, die dem Punkte O am nächsten liegt.

4. Ein Körper ſteht auf horizontalem Boden deſto feſter, je größer ſein Gewicht iſt, je niedriger ſein Schwerpunkt über der Baſis liegt, und je weiter allenthalben der Punkt, wo das aus ſeinem Schwerpunkte herabgefällte Loth den Boden trifft, vom Umfange der Baſis entfernt iſt.

5. Ein runder Körper (§. 96.), der auf einem durch ſeine Axe ſenkrecht gehenden Querſchnitte ruhet, hat nach allen Seiten zu gleiche Stabilität: denn ſein Schwerpunkt fällt in die Axe, und folglich O in den Mittelpunkt ſeiner kreisförmigen Baſis. Seine Stabilität iſt bey übrigens gleichen Umſtänden deſto größer, je größer der Halbmeſſer des Kreiſes iſt. Bey runden Körpern, die ähnlich ſind, verhält ſie ſich wie derren Gewichte.

6. Bey einer Kugel iſt die Stabilität $= o$, d. h. ſie liegt zwar ruhig, ſo lange ſie unberührt bleibt, aber bey dem geringſten Stoße, den man ihr giebt, kommt ſie ins Rollen.

7. Es ſey die Höhe einer cylindriſchen Säule $= h$, der Halbmeſſer der Baſis $= f$, das ſpezifiſche Gewicht der Materie, aus der ſie beſteht, $= G$; ſo iſt $P = \pi G f^2 h$, alſo $S = 2\pi G f^3$. Die Stabilität derſelben iſt alſo von ihrer Höhe unabhängig, und bey cylindriſchen Säulen von einerley Materie verhält ſie ſich wie der Cubus des Halbmeſſers.

§. 113.

Da Fuhrwerke bey größerer Breite und kleinern Rädern weniger dem Umſchlagen ausgeſetzt ſind, ſo

muß man ihre Breite faſt in eben dem Verhältniſſe vermehren, als man ihnen gröſsre Räder giebt, wofern man an Stabilität nicht verlieren will. Die inclinirte Lage der Speichen an den Rädern gewährt, wie in mancher andern Rückſicht, auch hier weſentliche Vortheile. Außerdem kommt viel darauf an, wie auf dem Wagen die Laſt vertheilt wird: damit nemlich der Schwerpunkt des Ganzen ſo tief als möglich und in die Mitte zu liegen komme, müſſen die ſchwereren Sachen unten hingebracht werden, und keine Seite darf mehr bepackt ſeyn als die andere. Zur Beurtheilung des Effekts, den in dieſem Betracht die Verlegung der Sachen an andern Stellen hervorbringt, dient folgender Satz:

§. 113. a.

Fig. 22. Wenn in einem Behältniſſe, deſſen Gewicht P iſt, eine Laſt p aus dem Orte M nach m verlegt wird, ſo verrückt ſich der Schwerpunkt G des ganzen Behältniſſes nach der mit Mm parallelen Richtung um $Gg = \frac{pMm}{P}$

Beweis. 1) Es ſey O der Schwerpunkt der Maſſe P — p, wenn die Laſt p aus dem Behältniſſe ganz weggenommen wird, ſo iſt G der gemeinſchaftliche Schwerpunkt von O und M; es liegen alſo O, G und M in gerader Linie, und zwar ſo daß

OG : GM = p : P — p, oder OG : OM = p : P.

2) Eben ſo fällt, wenn p in m gelegt wird, der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in der geraden Linie Om

irgendwo in g, und es ist nun Og : Om = p : P, folglich hat man:

OG : OM = Og : Om.

3, Zieht man also die gerade Linie Gg und Mm, so sind die Dreyecke OGg und OMm ähnlich: daher ist Gg mit Mm parallel, und Gg : Mm = OG : OM = p : P, folglich

$$P \cdot Gg = p \cdot Mm, \text{ oder } Gg = \frac{p \cdot Mm}{P}$$

Also kommt beym Umwerfen einer Sache, in Ansehung des Ganzen, ihre Stelle gar nicht in Betracht, sondern nur allein ihr Gewicht, und die Richtung und Größe ihrer Ortsveränderung.

§. 114.

Es sey der Querschnitt einer Mauer ein Trapezium, dessen obere Breite = f, die untere = g; die Höhe der Mauer sey = h, ihre Masse oder ihr Gewicht = M, so ist bey ihr (§. 111.) $DO = \frac{1}{2}g$, $GO = \frac{1}{3}\frac{h(2f+g)}{f+g}$ (§. 87.), folglich ihre Stabilität $= \frac{3Mg(f+g)}{2h(2f+g)}$.

Hätte die Mauer allenthalben die Dicke $\frac{1}{2}(f+g)$, so wäre ihre Masse noch dieselbe, und ihre Stabilität $= \frac{M(f+g)}{2h}$; also verhält sich die Stabilität der gleichdicken Mauer zu der einer trapezenförmigen bey gleicher Masse und Höhe, wie $2f+g$ zu $3g$, so daß folglich letztere immer größer als erstere ist, so lange $g > f$.

§. 115.

Setzt man das spezifische Gewicht = 1, so ist die Masse des Trapeziums = $\frac{1}{2}$ h (f + g), also seine Stabilität = $\frac{5c\,(f+g)^2}{4\,(2f+g)}$. Da dieser Ausdruck kein h enthält, so folgt: daß zwey senkrechte Trapezia auf gleicher Grundlinie einerley Stabilität haben, wofern nur ihre obere Breite dieselbe ist.

Bringt man den Ausdruck auf die Form $\frac{1}{4}$ g $(g + \frac{f^2}{2f+g})$, so sieht man, daß er mit f zugleich abnehme und wachse; daher hat von zweyen senkrechten Trapezien, die einerley Basis haben, das die größte Stabilität, welches oben breiter ist.

Also steht auf eben der Grundfläche eine gleiche dicke Mauer fester, als eine andere, die nach oben zu schmaler ist.

Schiefe Fläche.

§. 116.

Wenn die Ebene, auf der sich der Körper befindet, gegen den Horizont geneigt ist, so hat er vermöge seiner Schwere, wenn er auch vor dem Umschlagen gesichert ist, doch immer ein Bestreben längs derselben hinunter zu gleiten. Denn der Widerstand, den die Fläche dem Körper entgegensetzt, ist senkrecht auf die Fläche; also setzt auch, diese Kraft geht durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist ihre Richtung doch nicht vertikal,

folglich kann sie sein Gewicht nur zum Theil aufheben, und bildet mit diesem eine zusammengesetzte Kraft, die den Körper parallel der Fläche herabtreibt.

§. 117.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, die den Körper auf der schiefen Fläche im Gleichgewichte erhält. Fig. 23. Aufl. 1. Es sey EF der Durchschnitt einer nach Gefallen angenommenen horizontalen Ebene mit der schiefen; G der Schwerpunkt des Körpers; GCE $= 90°$, und dann auch in der horizontalen Ebene ECB $= 90°$, so steht EF, also auch die Ebene BCE, auf der Ebene GCB senkrecht, d. h. sie ist vertikal.

2) Sie schneide die schiefe Ebene in AC, so ist auch ACE $= 90°$, folglich ACB der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die horizontale; dieser heiße I.

3) Es sey ferner GD vertikal; GO auf AC senkrecht, so ist diese Linie die Normale der schiefen Ebene in O, und liegt mit GD in einerley vertikalen Ebene GCB.

4) Vorausgesetzt also, daß O innerhalb der Basis des Körpers fällt, worinn er die schiefe Fläche berührt, so wirkt diese mit der ganzen Kraft, womit sie gedrückt wird, auf G nach OG zurück (§. 112. 1.). Wir wollen diesen Druck Π nennen.

5) Es sey Gn die verlängerte Richtung desselben, so ist noch irgend eine andere Kraft nach einer willkührlichen Richtung Gf in der Ebene GCB erforderlich, der Kraft P, die der Körper nach GD ausübt, das Gleichgewicht zu halten.

6) Man ſetze dieſe Kraft = V, und den Winkel GHB, den ihre verlängerte Richtung mit der Horizontale macht, = I', ſo hat man

V Sin HGB = Π Sin DGO oder

V Cos I' = Π Sin I, und

P Sin DGO = V Sin HGO (§. 52.), oder

P Sin I = V Cos (I' — I)

folglich $V = \frac{P \text{ Sin } I}{\text{Cos } (I' - I)}$

§. 118.

Hieraus laſſen ſich folgende Bemerkungen ziehen:

1. Die Richtung der Kraft V muß in GCB, der Neigungsebene der ſchiefen Fläche gegen die horizontale, liegen, und durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

2. Iſt I' = I, oder die Richtung dieſer Kraft mit AC parallel, ſo iſt V = P Sin I. Alsdann iſt ſie alſo am kleinſten, folglich dieſe Richtung für ſie unter allen die vortheilhafteſte.

3. Der Schwerpunkt ſtrebt nach dieſer Richtung GI unmittelbar fortzurücken, weil ſie die Fläche nirgends ſchneidet, und alſo eine freye Richtung für ihn iſt. Es iſt zu bemerken, daß ſie dem Körper zugleich den kürzeſten Weg darbietet, zum tiefſten Punkte zu gelangen.

4. Iſt I' = o, oder die Richtung der Kraft horizontal, ſo iſt $V = \frac{P \text{ Sin } I}{\text{Cos } I} = P \text{ tang } I.$

5. Der Druck Π, den die Fläche leidet, ist = $\frac{V \cos I'}{\sin I} = \frac{P \cos I'}{\cos (I' - I)}$. Für $I' = I$, oder für die vortheilhafteste Richtung der Kraft ist derselbe = $P \cos I$; und für $I' = o$, $= \frac{P}{\cos I}$. Man sieht leicht, daß bey jeder andern Richtung der Kraft, als der mit der Fläche parallelen, ein Theil derselben darauf verwandt werde, den Körper entweder noch fester an die Fläche anzudrücken, oder den Druck $P \cos I$, der von ihm herrührt, zu erleichtern.

Anmerk. Man bedient sich der schiefen Fläche bey mechanischen Operationen da am vortheilhaftesten, wo die Lasten zu einer geringen Höhe erhoben werden sollen, als z. B. wenn man sie vom Ufer auf Schiffe bringen, oder vom Schiffe über Bord schaffen will. Auch kann man umgekehrt durch sie Lasten sanft herab gleiten lassen, ohne das ganze Gewicht derselben zu tragen.

Stabilität des Körpers auf schiefer Fläche.

§. 119.

Körper, die auf horizontaler Fläche feststehen, bekommen nicht allein ein Bestreben herabzugleiten, wenn man die Fläche inclinirt, sondern sie werden auch dadurch zum Umschlagen nach der herabwärtsgehenden Seite geneigter, gewinnen aber dafür an Stabilität in Rücksicht der entgegengesetzten Seite. Um nun das Verhalten eines Körpers in Ansehung dieser Art von Bewegbarkeit abgesondert betrachten zu können, wollen wir annehmen, er sey durch eine feste Widerlage verhindert,

bert, über den Punkt D, den wir jetzt als den äußersten Punkt seiner Basis ansehen wollen, fortzurücken. Ferner gehe durch D eine der Seitenlinien der Basis parallel mit EF, so fragt es sich, unter welchen Umständen der Körper, oder, welches einerley ist, sein Schwerpunkt um diese sich drehen werde.

§. 120.

Aufgabe. Die Stabilität des Körpers auf der schiefen Fläche in Rücksicht der queren Seitenlinie seiner Basis zu finden.

Fig. 23. **Aufl.** 1) Man fälle aus G auf die Basis, GO, und aus O auf die Umdrehungslinie, OD senkrecht; ferner ziehe man GI mit OD parallel, und errichte darauf aus D das Perpendikel DI.

2) Da DO in der Durchschnittslinie AC liegt, (§. 117.) so ist GOD die vertikale Neigungsfläche der Ebene gegen die horizontale, folglich liegt auch GI in dieser, und man kann das Gewicht P des Körpers in eine Kraft $=$ P Cos I nach GO, und in eine $=$ P Sin I nach GI zerlegen.

3) Erstere hat gegen die durch D gehende Axe das Moment P . DO Cos I, letztere das Moment P . DI Sin I $=$ P . GO Sin I. Beyde Kräfte streben den Schwerpunkt nach verschiedenen Seiten um D zu drehen; soll also der Körper in Ruhe bleiben, so muß P . DO Cos I $=$ P . GO Sin I seyn.

4) Aber hier würde durch die geringste Kraft, die GI hinzukäme, eine Umdrehung nach dieser Seite

zu bewirkt werden. Dies wäre also derjenige Fall, wo die Stabilität des Körpers = o ist.

5) Man setze daher, es könne noch die Kraft S nach GI auf G angebracht werden, ohne daß der Körper wanke; sie sey aber gerade so groß als nöthig ist, um alle Stabilität aufzuheben, so ist sie der Stabilität äquipollent, und da sie zu der vorigen Kraft P Sin I nach GI hinzukommt, das Moment nach dieser Seite zu jetzt = (S + P Sin I) GO, folglich wegen des Gleichgewichtes (S + P Sin I) GO = P . DO Cos I

oder $S = P\,\frac{(DO\,Cos\,I - GO\,.\,Sin\,I)}{GO}$

6) Auf gleiche Weise findet man, wenn DO die Entfernung des Punktes O von der entgegengesetzten Querseite der Basis bedeutet, $S = \frac{P\,(DO\,Cos\,I + GO\,Sin\,I)}{GO}$

§. 121.

Es sey jetzt, nicht wie vorhin D, sondern C der äusserste Punkt der Basis, also EF die Umdrehungskante, so ist in Rücksicht dieser: $S = \frac{P\,(CO\,.\,Cos\,I - GO\,Sin\,I)}{GO}$

$= \frac{P\,Cos\,I}{GO}\,.\,(CO - GO\ tang\ I)$ Ferner sey GD die Vertikale, so hat man DO = GO tang I, folglich $S = \frac{P\,Cos\,I\,.\,CD}{GO}$.

Wäre dagegen C der äußerste Punkt im obern Theile der Basis, so lägen die Punkte D und C auf verschie-

denen Seiten von O, und es wäre alsdann CO + OD = CD, folglich die Stabilität in Rücksicht der obern Kante ebenfalls $= \frac{P \cdot CD \cos I}{GO}$.

Die Stabilität des Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich also direkt wie die Entfernung des Punktes, wo die Vertikale aus dem Schwerpunkte in die Ebene eintrifft, von den Seiten der Basis, und verkehrt wie das Perpendikel aus dem Schwerpunkte auf der Basis gefällt.

Man sieht hieraus, daß die Frage, ob der Körper sich selbst überlassen, auf schiefem Boden umschlagen werde, oder nicht? gerade so beantwortet werde, als in dem Falle, wenn der Boden horizontal ist. Der Körper ist nemlich vor dem Umschlagen gesichert, wenn die Vertikale in den schiefen Boden innerhalb der Basis eintrifft, kann aber nicht seine Stellung behaupten, wenn dieser Punkt außerhalb der Basis fällt.

§. 122.

Aufgabe. Ein Körper, dessen Gewicht = P ist, hat auf horizontalem Boden gegen eine der Seiten seiner Basis die Stabilität S; man fragt, wie stark der Boden inclinirt werden darf, ehe der Körper umschlägt.

Auflösung 1) Es sey I der gesuchte Neigungswinkel; da für ihn die Stabilität des Körpers = o

werden ſoll, ſo hat man (§. 120.) DO Cos I — GO Sin I = o, oder tang I = $\frac{DO}{GO}$.

2) Nun iſt (§. 111.) S = $\frac{P \cdot DO}{GO}$ = P tang I, alſo: tang I = $\frac{S}{P}$

Exempel 1. Es ſey der Körper ein Cubus, ſo iſt DO = GO, alſo S = P; daher tang I = 1, und I = 45°.

2. Für eine Halbkugel iſt DO der Radius, GO = $\frac{5}{8}$ DO (§. 96.) alſo S = $\frac{8}{5}$ P, folglich tang I = 1, 6 und I = 57° 59′ 40$\frac{2}{3}$″

Das Wälzen runder Körper.

§. 123.

Runde Körper, als Walzen, Tonnen u. dergl. berühren den ebenen Boden nur in einer Linie, nemlich in dem Durchſchnitte einer Ebene mit dem Boden, die durch ihre Axe geht, und auf dem Boden ſenkrecht iſt. Liegen ſie daher der Quere nach auf demſelben, d. h. ſo, daß die Berührungslinie die Neigungslinie des Bodens ſenkrecht ſchneidet, ſo iſt DO = o, alſo ihre Stabilität = — P Sin I.

Ein runder Körper hat daher auf einer ſchiefen Fläche ein eben ſo großes Beſtreben ſich zu drehen als herabzugleiten, und dies macht, daß letzteres nie geſchieht, weil der berührende Theil allemal am Boden haftet. Das Umſchlagen bekommt aber wegen der

fortwährend neuen Berührung eine Continuität, und artet dadurch in eine eigene Art von Bewegung aus, die man das **Wälzen** oder **Rollen** nennt.

§. 124.

Das Hinaufbewegen schwerer Lasten auf schiefen Flächen geschieht gewöhnlich durch Walzen, die man darunter legt. Dies gewährt unter andern Vortheilen auch den, daß man dabey Hebelarme anbringen kann, welches die Operation ungemein erleichtert. Wir wollen setzen, die Last P liege auf mehrern Walzen, deren Fig. 24. Anzahl $= n$, so drückt auf jede derselben in E die Kraft $\frac{P}{n}$ nach der Vertikale EB.

Da die Walze sich nur um O drehen kann, so wirkt diese Kraft am einarmigen Hebel CEO unter dem Winkel BEO $= I$, dem Neigungswinkel der schiefen Fläche, und hat also das Moment $\frac{P}{n} . EO \sin I$.

Eben so wirkt in G das Gewicht der Walze, das π heißen mag, mit der Kraft $\pi \sin I$ (§. 123.) nach senkrechter Richtung Gg, und hat folglich das Moment $\pi . GO \sin I$.

Soll diesen nun eine Kraft V nach Cc das Gleichgewicht halten, so hat man:

$V . CQ = (\frac{P}{n} . EO + \pi . GO) \sin I$, oder wenn Halbmesser der Walze $= a$, und die Länge des Hebels $CO = f$ gesetzt wird,

$$nVf = (2P + n\pi)\, a \operatorname{Sin} I, \text{ also}$$

$$V = \frac{a \operatorname{Sin} I}{nf} \cdot (2P + n\pi)$$

Damit die Walze ſich nicht verſchiebt, muß auf beyden Seiten ein Hebel angebracht werden, wodurch für jeden Arbeiter die erforderliche Kraft $V = \frac{a \operatorname{Sin} I}{2nf}$ $(2P + n\pi)$ wird.

Exempel Es ſey eine Laſt von 6000 ℔ durch zwey Walzen, deren jede 1 Fuß im Durchmeſſer hat, und 250 ℔ wiegt, unter einem Winkel von 12° erheben; der hervorſtehende Hebelarm CE ſey 4 Fuß lang, ſo iſt $V = \frac{1}{20}(P + \pi) \operatorname{Sin} 1$, $P + \pi = 6250$, $\operatorname{Sin} I = 0{,}2079117$, alſo $V = 129{,}94$ ℔, oder beynahe 130 ℔.

§. 125.

Einen ähnlichen Vortheil, wie bey Erhebung der Laſten durch ſchräge Flächen, gewährt der ſchiefe Zug bey Rädern, die über einen Widerſtand gehoben werden ſollen.

Es ſey DBG ein Rad, deſſen Mittelpunkt O von einem belaſteten Wagen das Gewicht P trägt; OI die Höhe eines hervorragenden Hinderniſſes, über das es vermittelſt einer nach CA gerichteten Kraft V gezogen werden ſoll, ſo läßt ſich dieſe folgendermaßen beſtimmen:

Fig. 25. 1) Kraft und Laſt drücken das Rad an den höchſten Punkt O des Widerſtandes, und bewirken dadurch, daß daſſelbe, wenn es bewegt werden ſoll, um

dieſen Punkt ſich drehen muß. Daher iſt der Halbmeſſer CO als ein Hebel anzuſehen, der in O ſeinen Ruhepunkt hat.

2) An dieſem zieht nun in C das Gewicht P nach der Vertikale CB, und in eben dem Punkte die Kraft V nach CA; das Moment des erſtern iſt P . CO Sin OCB, das der letztern V . CO Sin OCA (§. 56.); ſollen alſo beyde mit einander im Gleichgewichte ſeyn, ſo hat man: P Sin OCB = V Sin OCA.

3) Man ſetze den Winkel ACD, den die Richtung der Kraft V mit der Horizontale CD macht, = ε den Halbmeſſer des Rades = a, die Höhe des Widerſtandes = i, und ziehe Ol mit BI parallel, ſo iſt Cl = CB — OI = a — i, alſo Ol = $\sqrt{[a^2 - (a - i)^2]} = \sqrt{(2ai - i^2)}$, und Sin OCB = $\frac{\sqrt{(2ai - i^2)}}{a}$, Cos OCB = $\frac{a - i}{a}$.

4) Ferner Sin OCA = Sin ACD Cos DCO + Cos ACD Sin DCO = $\frac{\sqrt{(2ai - i^2)}\,\text{Sin}\,\varepsilon + (a - i)\,\text{Cos}\,\varepsilon}{a}$, daher wird (2)

$P\sqrt{(2ai - i^2)} = V\,\text{Sin}\,\varepsilon\sqrt{(2ai - i^2)} + V\,\text{Cos}\,\varepsilon\,(a - i)$, und

$$V = \frac{P\sqrt{(2ai - i^2)}}{(a - i)\,\text{Cos}\,\varepsilon + \sqrt{(2ai - i^2)}\,\text{Sin}\,\varepsilon}$$

§. 126.

Hiernach läßt ſich beurtheilen, wie viel Kraft man anzuwenden haben, einen beladenen Wagen auf

rauhem Wege fortzuziehen. Alsdann ist aber i allemal gegen a sehr gering, und man kann im Nenner den Theil $\sqrt{(2ai - i^2)}$ Sin ε gegen $(a - i)$ Cos ε, und im Zähler i^2 gegen 2ai wegwerfen, wodurch man $V = \frac{P\sqrt{2ai}}{a \text{ Cos } \varepsilon} = P \text{sec } \varepsilon \sqrt{\frac{2i}{a}}$ erhält. Dies veranlaßt nun folgende Bemerkungen:

1) Die Kraft wächst nicht wie die Höhe des Widerstandes, sondern nur wie Quadratwurzel aus demselben, so daß z. B. zur Ueberwindung eines doppelt so hohen Widerstandes nur ungefähr $1\frac{2}{3}$ mal so viel Kraft nöthig ist.

2) Sie verhält sich verkehrt wie $\sqrt{a}$; also sieht man daß höhere Räder viel leichter über hervorragende Hindernisse zu ziehen sind, als kleinere, und deshalb den Vorzug verdienen.

3) Sie wirkt am vortheilhaftesten, wenn sie senkrecht auf CO gerichtet ist. Ist nun OI gering, so ist CO beynahe vertikal, also die wirksamste Richtung beynahe mit der horizontalen einerley, wie auch die Formel angiebt.

§. 127.

Wenn auf dem Wege mehrere solcher hervorstehenden Hindernisse in kleinen und fast gleichen Zwischenräumen liegen, so senkt sich das Rad, je nachdem es groß ist, verschiedentlich zwischen ihnen ein, und berührt den Boden gar nicht. Es hängt alsdann die Tiefe Bl — i zugleich von a ab, nemlich wenn man die

halbe Weite eines solchen Zwischenraumes f nennt, so ist $OI = f = \sqrt{(2ai - i^2)}$, folglich $V = \frac{Pf}{a}$; also verhält sich dann die Kraft verkehrt wie der Halbmesser des Rades. Dieser Fall findet aber, genau genommen, nur da statt, wo das Rad im weichen Boden einsinkt, wovon wir in der Folge reden werden. Couplet, Mem. de l'Acad. de Paris 1735.

Vom Drucke der Dächer.

§. 128.

Fig. 26. **Aufgabe.** Der Balken BC sey mit dem einen Ende C an eine vertikalstehende Wand CD angelehnt, mit dem andern Ende B stütze er sich theils gegen den horizontalen Boden DB, theils gegen eine Widerlage, die in B befestigt ist, und ihn verhindert nach Bq auszuweichen; man fragt, welchen Druck dieser Balken durch sein Gewicht auf die Wand, den Boden und die Wiederlage ausübt.

Aufl. 1) Das Gewicht des Balken, welches P heißen mag, wirkt von seinem Schwerpunkte G, aus nach der Vertikale Gg und vertheilt sich auf die Unterstützungspunkte B und C nach gleichfalls vertikalen Richtungen Bp und CD. Setzen wir also, G falle in die Mitte von BC, so kommt auf jeden dieser Punkte das Gewicht $\frac{1}{2}$ P.

2) Ersteres drückt den Boden in B [illegible], und wird von ihm getragen: letzteres kann [illegible]

durch zwey Kräfte aufgehoben werden: durch den senkrechten Widerstand der Mauer, und durch den Gegendruck, den der Balken in B nach BC leidet.

3) Man zerlege daher dasselbe nach Cf senkrecht auf CD, und nach CB, und nenne die daraus entspringenden Kräfte M und N, so hat man (§. 52.)

$M = N \sin DCB$, und

$\frac{1}{2} P = N \sin fCB$, oder wenn der Winkel CBD $= I$ gesetzt wird: $M = N \cos I$, $\frac{1}{2} P = N \sin (180° - I) = N \sin I$, folglich $N = \frac{P}{2 \sin I}$, $M = \frac{1}{2} P \cot I$.

4 Die Kraft N, welche auf den Punkt B wirkt, und daselbst einen Druck nach Bo ausübt, zerfällt in eine nach $Bq = N \cos I = \frac{1}{2} P \cot I$, und in eine nach $Bq = N \sin I = \frac{1}{2} P$, welche letztere mit dem Gewichte $\frac{1}{2} P$ (2) zusammen den vertikalen Druck P giebt.

5) Der Balken übt also gegen die Wand sowohl als gegen die Widerlage nach den entgegengesetzten Richtungen Cf und Bq den Druck $\frac{1}{2} P \cot I$ aus, und ausserdem trägt noch der Punkt B sein ganzes Gewicht P.

Anmerk. Außer dieser Auflösung, die Fontana in den Mem. di Matem. e Fisica della Soc. Ital. Tom. III. von gegenwärtiger Aufgabe geliefert hat, findet sich in eben den Memoiren Tom. IV. eine andere von Salimbeni. Sie giebt aber eben die Resultate, und weicht nur darinn ab, daß das ganze Gewicht P aus G auf den Durchschnittspunkt der Vertikale durch G und der Horizontale durch C versetzt, und dann nach letzterer Richtung und einer nach B gehenden zerlegt wird. Eine dritte, die aber wegen der Construkti

und vollständiger S. siehe Lorgna in seinem Werke Saggi di Statica e di Meccanica applicate alle arti.

§. 129.

Sind daher zwey gleiche Balken AC und BC in einer vertikalen Ebene unter einerley Winkel gegen einander gestemmt, so wird der gegenseitige Druck in C aufgehoben; das Uebrige bleibt aber wie vorhin, und geschieht auf der einen Seite so wie auf der andern.

§. 130.

Anders verhält es sich mit dem Drucke des Balken BC, wenn er auf einem vertikal stehenden CD aufliegt, oder in denselben hineingefugt ist. Alsdann widersteht dieser ihm nach einer auf CB senkrechten Richtung. Man zerlege also das auf C kommende Gewicht $\frac{1}{2}$ P nach dieser Richtung, und nach einer andern längs CB herabgehenden, so ist [illegible] $\frac{1}{2}$ P [illegible], welche aufgehoben wird, letztere [illegible] $\frac{1}{2}$ P [illegible] [illegible] den Druck nach B [illegible] Bq [illegible] $\frac{1}{2}$ P [illegible] der [illegible] $\frac{1}{2}$ P [illegible] $\frac{1}{2}$ P [illegible] [illegible] lage = $\frac{1}{2}$ P [illegible]

[illegible] CD [illegible] [illegible]

[illegible]

tigem Falle auf zwey Punkte B und D des Bodens vertheilt, und übt gegen die Widerlage einen geringern Druck aus, als im vorigen Falle; jener war nemlich $= \frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I$; dieser ist $= \frac{1}{2} P \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I$; also verhält sich erſterer zu letzterem wie $1 : \operatorname{Sin} I^2$, und ist folglich allemal größer.

Am auffallendſten ist dieſer Unterſchied für $I = o$; da ist der horizontale Druck des bloß angelehnten Balken unendlich, und der des aufliegenden $= o$.

§. 131.

Liegt auf der andern Seite noch ein Balken AC, ſo daß der vertikal ſtehende CD beyde in Verbindung ſetzt, und ſie zu gleicher Zeit unterſtützt, ſo wird der Druck $\frac{1}{2} P \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} I$ nach Cf von dem gleich großen, den AC nach entgegengeſetzter Richtung auf C ausübt, aufgehoben; der Druck auf D verdoppelt ſich dagegen, und wird $= P \operatorname{Cos} I^2$. Außerdem trägt der Boden ſowol in A als B das Gewicht $\frac{1}{2} P (1 + \operatorname{Sin} I^2)$, und jede der Widerlagen ſtrebt eine Kraft $\frac{1}{2} P \operatorname{Cos} I^2$ aus der Stelle zu treiben.

§. 132.

Um den Druck des ganzen Daches gegen die darunter liegenden Balken zu beſtimmen, hat man nur nöthig, irgend einen ſeiner Querſchnitte ACB in Betracht zu ziehen, der durch zwey entgegengeſetzte Sparren AC und BC geht; und ſo läßt ſich das Vorhergehende hier leicht in Anwendung bringen. Die ganze Reihe der Sparren längs dem Dache theilt nemlich unter ſich

ganz das Gewicht der äußern Decke des Daches so daß allemal zwey neben einander liegende Sparren den Theil von ihr tragen, der zwischen ihnen enthalten ist. Was also vorhin P genannt ist, besteht aus dem Gewichte der Sparre mit Inbegriff dessen, was diese von der Dachfläche zu tragen hat.

Diese doppelte Last wirkt nun auf zweifache Art:

1) Sie drückt auf die Tragbalken vertikal niederwärts.

2) Sie übt einen horizontalen Druck gegen die Widerlage aus, und strebt dadurch den Pfeiler, auf dem die Widerlage befestigt ist, nach aussen zu umzustürzen.

Diese letzte Wirkung der Dächer, wodurch sie der Festigkeit der Gebäude vorzüglich nachtheilig werden können, heißt ihre Sperrung oder Propulsion (la poussée horizontale).

§. 138.

Wenn die Sparren [illegible] und [illegible] durch eine Hängesäule [illegible] verbunden sind (§. 136) [illegible] durch die Punkte [illegible] und [illegible] ein Querbalken [illegible], der dann in seinen Endpunkten durch Pfeiler [illegible] ist. Dieser Querbalken ist [illegible] Sparren [illegible] (§. 136).

[illegible]

[illegible]

von CD vermehrt, und ist, wenn dieses H genannt wird, $= H + P \cos I^2$. Dieser vertheilt sich auf die Unterstützungspunkte A und B, wodurch die ganze Last, die jeder derselben zu tragen hat, $= P + \frac{1}{2} H$ wird. Also theilen die Tragpfeiler das ganze Gewicht des Dachprofiles $2P + H$ unter sich.

II. Im zweyten Falle ist der Druck auf jeden der Punkte A und [illegible] $= P$, und die Propulsion ist $= \frac{1}{2} P \cot I$.

Anmerk. Der beträchtliche Unterschied zwischen der Sperrung im erstern und der im letztern Falle zeigt offenbar den Vortheil, der daraus erwächst, wenn die Sparren durch eine Hängesäule unterstützt werden. Ein anderes Mittel, die Sperrung des Daches zu vermindern, wird noch in der Folge vorkommen.

§. 134.

Es sey für die Länge $= 1$, das Gewicht der Sparre BC, nebst dem, was sie vom Dache zu tragen hat, $= G$, die halbe Breite des Daches $DB = b$; so ist $BC = b \sec I$, $P = Gb \sec I$, also die Propulsion $= \frac{1}{2} P \cot I = \frac{Gb}{2 \sin I}$.

Bey einerley Breite des Daches ist daher die Propulsion desto größer, je flacher das Dach ist.

Ist dagegen in C eine Stütze CD, oder besteht das Dach nur aus Einer Seitenfläche BC, der die vertikale Mauer CD zum Rückhalte dient (Pultdach) so ist die Propulsion in B $= \frac{1}{2} P \sin I C$[illegible] $= \frac{1}{2} Gb \sin I$, folglich gilt alsdann der un[illegible]hrte

Satz, daß ſteilere Dächer bey eben der Breite mehr Sperrung verurſachen.

Anmerk. Den erſtern Satz hat, ſo viel ich weiß, Couplet in Mem. de l'Acad. de Paris 1731 zuerſt gezeigt. Ueberhaupt ſcheint es, als wenn vor ihm noch keiner die Sperrung der Dächer in Betracht gezogen hat, und die Meinung, die noch jetzt manche Baumeiſter hegen, *) daß die Wirkung des Daches bloß in dem vertikalen Drucke beſtehe, und ſich nach dem Gewichte allein beurtheilen laſſe, allgemein geweſen ſeyn muß. Die Verſchiedenheit der Reſultate bey Satteldächern und Pultdächern hat Hr. Aepinus **) verführt, Couplets Behauptung anzugreifen; andere, die Letzterem beytreten, betrachten doch immer nur die Sache von Einer Seite, und ſchlichten dadurch den Streit nicht.

§. 135.

Aufgabe. Die erforderliche Dicke einer Mauer zu beſtimmen, damit ihre Stabilität der Propulſion des Daches das Gleichgewicht halte.

Aufl. 1) Es ſey die halbe Breite des Daches $= b$, das mittlere Gewicht deſſelben für 1 Quadratfußfläche $= G$, der Neigungswinkel $= I$, ſo iſt der vertikale Druck $= \frac{Gb}{\cos I}$, der horizontale $= \frac{Gb}{2 \sin I}$, beydes für 1 Fuß Breite gerechnet.

2) Die Höhe der Mauer ſey nun $= a$, ihre geſuchte Dicke $= x$, ihr ſpezifiſches Gewicht $= K$, ſo iſt für 1 Fuß Breite ihr Gewicht $= Kax$, dazu den

*) Ein z. B. giebt Hr. Schmidt den flachen italiäniſchen Dächern deshalb den Vorzug, weil ſie das Gebäude wenigen belaſten. S. bürgerl. Baumeiſter 1 Theil, Kap. 7.

**) Commentat. Petrop. Tom. XIV.

vertikalen Druck des Daches addirt, giebt $Kax + Gb \operatorname{Sec} I$ für das ganze Gewicht; daher die Stabilität $= Kx^2 + \frac{Gbx \operatorname{Sec} I}{a}$ (§. 111.).

3) Da dieſe im Schwerpunkte, d. i. in der Mitte der Mauer nach horizontaler Richtung widerſteht, ſo muß ſie doppelt ſo groß als die Propulſion ſeyn, um ihr das Gleichgewicht zu halten; alſo hat man

$$Kx^2 + \frac{Gbx \operatorname{Sec} I}{a} = \frac{Gb}{\operatorname{Sin} I}, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{Gbx}{Ka \operatorname{Cos} I} - \frac{Gb}{K \operatorname{Sin} I} = o.$$

Exempel. Das Dach ſey mit Ziegelſteinen gedeckt, ſo kann man auf den Quadratfuß mit Inbegriff des Kalkes am Gewicht 12 ℔ rechnen; das Gewicht des Holzes für eben die Fläche nehme ich zu 9 ℔ an, ſo iſt $G = 21$ ℔. Für die ſteinerne Mauer ſetze man $K = 189$ ℔; alsdann bekommt man

$$x^2 + \frac{bx}{9a \operatorname{Cos} I} - \frac{b}{9 \operatorname{Sin} I} = o$$

Nun ſey $b = 15$ Fuß, $a = 40$ Fuß, die Höhe des Daches $= \frac{1}{4}$ der ganzen Breite, ſo wird $\operatorname{Sin} I = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{Cos} I = \frac{2}{\sqrt{5}}$, folglich $x^2 + \frac{x\sqrt{5}}{48} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = o$, woraus man $x = 1{,}90703$ findet. Die geſuchte Dicke der Mauer iſt alſo 1 Fuß 10,88 Zoll.

Gebrochene Dächer.

§. 136.

Fig. 27. **Aufgabe.** Zwey gegebene Balken AF und FC zwiſchen dem horizontalen Boden AD, und der vertikalen Wand CD ſo übereinander zu ſtellen, daß ſie ſich im Gleichgewichte erhalten.

Auflöſ. 1) Es ſey das Gewicht von AF = P, das von FC = Q, der Neigungswinkel FAD des erſtern = I, der des andern CFI = I'.

2) Der obere übt auf den untern den Druck Q nach der Vertikale FK, und den Druck $\frac{1}{2}$ Q Cot I' nach der Horizontale Fq aus. Dagegen widerſteht der untere nach Fn, der Verlängerung von AF, und außerdem drückt ihn in F ſein halbes Gewicht $\frac{1}{2}$ P vertikal herab, indem ſich ſein ganzes Gewicht auf die Punkte A und f vertheilt.

3) Dieſe vier Kräfte müſſen alſo in F einander das Gleichgewicht halten. Man ſetze den Widerſtand nach Fn = R, und zerlege dieſen nach Fp und Fl. Da pFn = AFK = 90° — I iſt, ſo wird erſterer Theil R Sin I, letzterer = R Cos I.

4) Jetzt hat man lauter vertikale und horizontale Kräfte am Punkte F, von denen alſo jene, ſo wie dieſe für ſich einander das Gleichgewicht halten müſſen. Daher wird:

R Sin I = $\frac{1}{2}$ P + Q und
R Cos I = $\frac{1}{2}$ Q Cot I'.

vertikalen Druck des Daches addirt, giebt $Kax + Gb \operatorname{Sec} I$ für das ganze Gewicht; daher die Stabilität $= Kx^2 + \frac{Gbx \operatorname{Sec} I}{a}$ (§. 111.).

3) Da dieſe im Schwerpunkte, d. i. in der Mitte der Mauer nach horizontaler Richtung widerſteht, ſo muß ſie doppelt ſo groß als die Propulſion ſeyn, um ihr das Gleichgewicht zu halten; alſo hat man

$$Kx^2 + \frac{Gbx \operatorname{Sec} I}{a} = \frac{Gb}{\operatorname{Sin} I}, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{Gbx}{Ka \operatorname{Cos} I} - \frac{Gb}{K \operatorname{Sin} I} = 0.$$

Exempel. Das Dach ſey mit Ziegelſteinen gedeckt, ſo kann man auf den Quadratfuß mit Inbegriff des Kalkes am Gewicht 12 ℔ rechnen; das Gewicht des Holzes für eben die Fläche nehme ich zu 9 ℔ an, ſo iſt $G = 21$ ℔. Für die ſteinerne Mauer ſetze man $K = 189$ ℔; alsdann bekommt man

$$x^2 + \frac{bx}{9a \operatorname{Cos} I} - \frac{b}{9 \operatorname{Sin} I} = 0$$

Nun ſey $b = 15$ Fuß, $a = 40$ Fuß, die Höhe des Daches $= \frac{1}{4}$ der ganzen Breite, ſo wird $\operatorname{Sin} I = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{Cos} I = \frac{2}{\sqrt{5}}$, folglich $x^2 + \frac{x\sqrt{5}}{48} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 0$, woraus man $x = 1{,}90703$ findet. Die geſuchte Dicke der Mauer iſt alſo 1 Fuß 10,88 Zoll.

in A und B durch Widerlagen am Zurückweichen verhindert werden. Hierauf gründet sich die Construction der **gebrochenen** oder sogenannten **mansardischen Dächer.**

§. 139.

Gewöhnlich werden bey einem solchen Dache die beyden Sparren AF, FC nicht unmittelbar in Berührung gebracht, sondern in einen Querbalken FG (Kehlbalken) eingefugt, den man noch durch eine Säule FK unterstützt. Dies ändert die Bestimmung des Bruches in sofern ab, daß der vertikale Druck Q von der obern Sparre sich nun auf FA und FK vertheilt, also AF nur die Hälfte davon zu tragen hat. Setzt man daher in §. 136. n. 4, $\frac{1}{2}$ Q statt Q, so erhält man R Sin I $= \frac{1}{2}$ (P + Q), R Cos I $= \frac{1}{2}$ Q Cot I', folglich tang I' $= \frac{Q \text{ tang } I}{P + Q}$.

Die Propulsion, welche vorhin (§. 137) $(\frac{1}{2}P + Q)$ Cot I war, wird dadurch auf $\frac{1}{2}$ Cot I (P + Q) zurück gebracht.

Anmerk. Die gebrochenen Dächer haben vor dem gewöhnlichen Dächern den entscheidenden Vorzug, daß sie eine bessere Lage des unteren Theiles zulassen, ohne dadurch die übermäßige Höhe des geraden Daches zu bekommen, die den Augen beleidigt, die Stabilität bis zur Gefahr vermindert, und außer dem einen Raum im Innern des Daches hervorbringt, der auf keine Art benutzt werden kann.

Viertes Kapitel.

Von der Vertheilung des Druckes auf mehrere Punkte und ganze Flächen.

§. 140.

Fig. 28. **Aufgabe.** Es sey die Grundfläche eines Körpers eben, und ruhe in horizontaler Lage auf den Punkten A, B und C. Man fragt, wie sich sein Gewicht auf diese Punkte vertheilen werde?

Aufl. 1) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in G, so ist G der gemeinschaftliche Schwerpunkt von A, B und C: denn der vereinigte Widerstand von diesen drey Punkten muß das Gewicht des Körpers aufheben, also dessen mittlere Richtung durch seinen Schwerpunkt, folglich auch durch G gehen.

2) Man setze nun das Gewicht des Körpers $= P$, den Druck, den die Punkte A, B, C leiden $= \Pi, \Pi', \Pi''$, und fälle aus A und G auf BC die Perpendikel AD und GI, so hat man (§. 74.), da die Entfernungen der Punkte B und G von BC $= o$ sind:

$$\Pi \,.\, AD = P \,.\, GI.$$

3) Da die Dreyecke ABC und GBC einerley Grundlinie haben, so ist $\Delta ABC : \Delta BGC = AD : GI$, also

$$\Pi = \frac{\Delta BGC}{\Delta ABC} \,.\, P$$

4) Eben so erhält man, wenn man AC und AB

in A und B durch Widerlagen am Zurückweichen verhindert werden. Hierauf gründet sich die Construktion der **gebrochenen** oder sogenannten **mansardischen** Dächer.

§. 139.

Gewöhnlich werden bey einem solchen Dache die beyden Sparren AF, FC nicht unmittelbar in Berührung gebracht, sondern in einen Querbalken FG (Kehlbalken) eingefugt, den man noch durch eine Säule FK unterstützt. Dies ändert die Bestimmung des Bruches in sofern ab, daß der vertikale Druck Q von der obern Sparre sich nun auf FA und FK vertheilt, also AF nur die Hälfte davon zu tragen hat. Setzt man daher in §. 136. n. 4, $\frac{1}{2}$ Q statt Q, so erhält man $R \operatorname{Sin} I = \frac{1}{2}(P+Q)$, $R \operatorname{Cos} I = \frac{1}{2} Q \operatorname{Cot} I'$, folglich $\operatorname{tang} I' = \frac{Q \operatorname{tang} I}{P+Q}$.

Die Propulsion, welche vorhin (§. 137.) $(\frac{1}{2} P + Q) \operatorname{Cot} I$ war, wird dadurch auf $\frac{1}{2} \operatorname{Cot} I$ $(P + Q)$ zurück gebracht.

Anmerk. Die gebrochenen Dächer haben vor dem gewöhnlichen Dächern den entscheidenden Vorzug, daß sie eine steilere Lage des unteren Theiles zulassen, ohne dadurch die übermäßige Höhe des geraden Daches zu bekommen, die das Auge beleidigt, die Stabilität bis zur Gefahr vermindert, und außer dem einen Raum im Innern des Daches hervorbringt, der auf keine Art benutzt werden kann.

der Körper nicht unterſtützt ſey. Eben dies zeigt hier dadurch, daß einer der Werthe von Π, Π', Π'' gativ wird.

Fig. 29. 3. Wenn daher die Punkte A, B, C in geraden Linie liegen, ſo kann der Körper nicht von nen getragen werden, wofern nicht auch G in dieſe fällt. In dem Falle iſt aber α, β und γ entweder oder 180°, alſo erhalten wir

$$\Pi = \frac{0}{0}, \quad \Pi' = \frac{0}{0}, \quad \Pi'' = \frac{0}{0},$$

Ausdrücke, die an ſich unbeſtimmt ſind, und alſo gen, daß der allgemeine Fall ſich auf dieſen beſon nicht unmittelbar anwenden laſſe.

§. 142.

Die Bedingungen, welche für dieſen zweife ten Fall der Hebel giebt, indem man der Reihe A, B und C als Unterſtützungspunkte annimmt, folgende:

$$\Pi'' AC + \Pi' AB = P \cdot AG$$
$$\Pi'' BC + \Pi AB = P \cdot BG$$
$$\Pi' BC - \Pi AC = P \cdot CG$$

Erſtere beyden addirt, geben $\Pi'' AB + \Pi' AB + \Pi$ $= P \cdot AB$, oder $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$. Man m plicire dieſe durch BC, und ſubtrahire davon die zw ſo bleibt die dritte übrig. Alſo iſt dieſe ganz unbr bar, und die drey Gleichungen zeigen weiter nichts, daß die Laſt unter die Punkte A, B, C ſich ganz theilt; in welchem Verhältniſſe aber? erfährt durch ſie nicht. Es ſcheint vielmehr, als liege e

Willkührliches in dieser Vertheilung, so bald mehr als zwey Stützen vorhanden sind.

§. 143.

Diese Unbestimmtheit liegt aber nicht in der Sache selbst, sondern zeigt bloß, daß man mit der bisherigen Theorie des Gleichgewichtes hier nicht zureicht: legt man nemlich einen Balken auf drey Stützen, deren Köpfe genau in einer Horizontale liegen, so trägt nothwendig jede Stütze einen bestimmten Theil von seinem Gewichte; also geschieht die Vertheilung gewiß nach irgend einem Gesetze, und richtet sich bloß darnach, wie die Stützen gestellt sind.

§. 144.

Das natürlichste Hülfsmittel, welches sich zu der Auflösung dieses Problems darbietet, ist eine Zweifel die Verwerfung: Die Vertheilung werde so gleichförmig geschehen als möglich, oder die Verschiedenheit [illegible]

der Körper nicht unterstützt sey. Eben dies zeigt sich hier dadurch, daß einer der Werthe von Π, Π', Π'' negativ wird.

Fig. 29. 3. Wenn daher die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen, so kann der Körper nicht von ihnen getragen werden, wofern nicht auch G in diese Linie fällt. In dem Falle ist aber α, β und γ entweder $= 0$ oder 180°, also erhalten wir

$$\Pi = \frac{0}{0},\ \Pi' = \frac{0}{0},\ \Pi'' = \frac{0}{0},$$

Ausdrücke, die an sich unbestimmt sind, und also zeigen, daß der allgemeine Fall sich auf diesen besondern nicht unmittelbar anwenden lasse.

§. 142.

Die Bedingungen, welche für diesen zweifelhaften Fall der Hebel giebt, indem man der Reihe nach, A, B und C als Unterstützungspunkte annimmt, sind folgende:

$$\Pi'' AC + \Pi' AB = P \cdot AG$$
$$\Pi'' BC + \Pi AB = P \cdot BG$$
$$\Pi' BC - \Pi AC = P \cdot CG$$

Erstere beyden addirt, geben $\Pi'' AB + \Pi' AB + \Pi AB = P \cdot AB$, oder $\Pi + \Pi' + \Pi'' = P$. Man multiplicire diese durch BC, und subtrahire davon die zweyte, so bleibt die dritte übrig. Also ist diese ganz unbrauchbar, und die drey Gleichungen zeigen weiter nichts, als daß die Last unter die Punkte A, B, C sich ganz vertheilt; in welchem Verhältnisse aber? erfährt man durch sie nicht. Es scheint vielmehr, als liege etwas

6) Dieſe Verhältniſſe zwiſchen p, p' und p'' geben nun: $p = \frac{\frac{1}{2} P (b^2 + ab - ac + c^2)}{a^2 + b^2 + ab + bc - ac + c^2}$, woraus ſich die Werthe von p' und p'' unmittelbar finden laſſen.

7) Fällt der Schwerpunkt des Balken in die Mitte von AB, ſo iſt $a = b$, folglich wird dann;

$$p = \frac{P(2a^2 - ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2}, \quad p' = \frac{P(2a^2 + ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},$$

$$p'' = \frac{2Pa^2}{6a^2 + 2c^2}$$

8) Für $c = o$, iſt $p = p' = p'' = \frac{1}{3} P$, alſo wird dann die Laſt auf die Stützen ganz vertheilt.

§. 145.

Auf dieſe Weiſe kann man die Vertheilung des Druckes für ſo viele Unterſtützungspunkte beſtimmen, als man will. Indeß wird die Auflöſung bey mehrern Stützen, wenn gleich nicht verwickelter, doch wenigſtens ſehr weitläuftig, weil man außer der Differenzialgleichung, welche die Vorausſetzung des Minimums giebt, alle die Gleichungen zu Hülfe nehmen muß, die aus der Bedingung des Gleichgewichtes fließen. Wir wollen daher bey den folgenden allgemeinern Problemen dieſes Kapitels daneben gezeigten Weg verlaſſen, und dafür ein anderes Verfahren wählen, das von ſeinem Erfinder, dem Hrn. Euler zu einer ſehr hohen Vollkommenheit gebracht iſt. Es beruhet auf dem Grundſatze: daß unendlich kleine Aenderungen allemal den Kräften proportional ſind, die ſie hervorbringen. Dieſer Satz klingt zwar in der Allgemeinheit, wie er hier ausge-

wegzuräumen, ſtatt der einfachen Differenzen ihre Quadrate nehmen, und die Summe $(p-p')^2+(p-p'')^2+(p'-p'')^2$ als Minimum betrachten.

2) Seßt man das Differenzial davon $=o$, und entwickelt es gehörig, ſo erhält man:

$$dp(p-p'-p'')+pp'(p'-p-p'')+dp''(p''-p-p')=o.$$

Da nun $p+p'+p''=P$ iſt, ſo wird $p-p'-p''=2p-P$, $p'-p-p''=2p'-P$ und $p''-p-p'=2p''=P$, alſo verwandelt ſich die Gleichung in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} 2pdp-Pdp \\ +2p'dp'-Pdp' \\ +2p''dp''-Pdp'' \end{array}\right\}=o.$$

3) Aber p, p', p'' ſind Theile des unveränderlichen Ganzen P, folglich $dp+dp'+dp''=o$; alſo auch $2pdp+2p'dp'+2p''dp''=o$.

4) Man ſeße nun $AG=a$, $BG=b$, $CG=c$, ſo giebt die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$ap+cp''-bp'=o, \text{ folglich}$$
$$adp+cdp''-bdp'=o.$$

Verbindet man dieſe mit den andern beyden Differenzialgleichungen n. 3, und eliminirt dadurch dp' und dp'' ſo erhält man: $(b+c)p+(a-c)p'-(a+b)p''=o$.

5) Man eliminire ferner aus dieſer p'' vermittelſt der Gleichung $ap+cp''-bp'=o$; alsdann wird:

$(a^2+ab+bc+c^2)p=(b^2+ab-ac+c^2)p'$,

und auf gleiche Art bekommt man, indem man p' wegſchafft:

$(a^2+bc-ac+b^2)p=(b^2+ab-ac+c^2)p''$.

6) Dieſe Verhältniſſe zwiſchen p, p′ und p″ geben nun: $p = \frac{\frac{1}{2}P(b^2 + ab - ac + c^2)}{a^2 + b^2 + ab + bc - ac + c^2}$, woraus ſich die Werthe von p′ und p″ unmittelbar finden laſſen.

7) Fällt der Schwerpunkt des Balken in die Mitte von AB, ſo iſt $a = b$, folglich wird dann;

$$p = \frac{P(2a^2 - ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2}, \quad p' = \frac{P(2a^2 + ac + c^2)}{6a^2 + 2c^2},$$

$$p'' = \frac{2Pa^2}{6a^2 + 2c^2}$$

8) Für $c = o$, iſt $p = p' = p'' = \frac{1}{3}P$, alſo wird dann die Laſt auf die Stützen ganz vertheilt.

§. 145.

Auf dieſe Weiſe kann man die Vertheilung des Druckes für ſo viele Unterſtützungspunkte beſtimmen, als man will. Indeß wird die Auflöſung bey mehrern Stützen, wenn gleich nicht verwickelter, doch wenigſtens ſehr weitläuftig, weil man außer der Differenzialgleichung, welche die Vorausſetzung des Minimums giebt, alle die Gleichungen zu Hülfe nehmen muß, die aus der Bedingung des Gleichgewichtes fließen. Wir wollen daher bey den folgenden allgemeinern Problemen dieſes Kapitels daneben gezeigten Weg verlaſſen, und dafür ein anderes Verfahren wählen, das von ſeinem Erfinder, dem Hrn. Euler zu einer ſehr hohen Vollkommenheit gebracht iſt. Es beruhet auf dem Grundſatze: daß unendlich kleine Aenderungen allemal den Kräften proportional ſind, die ſie hervorbringen. Dieſer Satz klingt zwar in der Allgemeinheit, wie er hier ausge-

drückt iſt, etwas hypothetiſch, er iſt aber in dem einzelnen Falle, wo wir ihn gebräuchen werden, der vollkommenſten Evidenz fähig.

§. 146.

Lehrſatz. Wenn ein Faden durch ein daran gehängtes Gewicht um einen unendlich kleinen Theil ausgedehnt wird, ſo iſt dieſe Aenderung ſeiner Länge dem Gewichte proportional

Beweis. Man ſetze, die Länge des Fadens bekomme durch das angehängte Gewicht P die Ausdehnung ω. Machte dieſe einen bedeutenden Theil von aus, ſo befände ſich der Faden in einem gewaltſamen Zuſtande, und ein eben ſo großes Gewicht P, zum vorigen hinzugefügt, würde nicht vermögend ſeyn, eben die Ausdehnung noch einmal zu bewirken, ſondern wenn letztere ω' heißt, ſo iſt $\omega' < \omega$. Je geringer aber ω in Vergleichung gegen 1 iſt, deſto mehr nähert ſich die Dehnbarkeit des Fadens in dem Zuſtande, in den ihn das Gewicht P verſetzt hat, ſeiner natürlichen Dehnbarkeit, alſo ω' deſto mehr ω, und gedenkt man ſich ω als unendlich abnehmend, ſo nähert ſich ω' unendlich ω, folglich iſt die Grenze davon: $\omega' = \omega$; alſo die Ausdehnung durch das doppelte Gewicht $= \omega + \omega = 2\omega$.

Bey eben der Vorausſetzung folgt, daß die Ausdehnung des Fadens durch das Gewicht $3P = 3\omega$ ſey u. ſ. f., woraus erhellet, daß unendlich kleine Aenderungen der Länge des Fadens ſich allemal ver-

halten, wie die Gewichte, durch die sie hervorgebracht sind.

§. 147.

Aufgabe. Ein Balken, dessen Schwerpunkt in O fällt, ruhet auf den Punkten M, M′, M″ u. s. f. in horizontaler Lage; man fragt, welchen Druck diese Punkte durch sein Gewicht P leiden.

Fig. 30. **Aufl.** 1) Man setze, statt der Stützen, werde der Balken in den Punkten M, M′, M″ u. s. f. durch Fäden gehalten, die in keinem Betracht von einander verschieden seyn sollen. Er wird sie durch sein Gewicht ausdehnen, und dadurch aus der horizontalen Lage nach und nach in eine schiefe kommen, bis er sich mit ihnen ins Gleichgewicht gesetzt hat.

2) Zu der Ausdehnung eines jeden dieser Fäden wird ein Theil vom Gewichte P verwandt, der gerade erforderlich ist, diese Wirkung für sich hervorzubringen; denn eine größere oder geringere Kraft würde den Faden entweder noch mehr ausdehnen, oder eine Zusammenziehung desselben gestatten, wobey also das Gleichgewicht nicht statt finden könnte.

3) Man kann nun die Fäden so stark annehmen, daß ihre Ausdehnungen unendlich klein sind; alsdann verhalten diese sich in den einzelnen Punkten M, M′ u. s. f. wie die Theile des Gewichtes, die auf diese Punkte kommen. Wir wollen diese Theile p, p′, p″ u. s. f. nennen.

4) Es sey nun $MO = x$, $M'O = x'$, $M''O = x''$ u. s. f., die Ausdehnung $Mm = y$, $M'm' = y'$ u. s. f.,

so sind die Punkte m, m', m'' u. s. f. wieder in e
anderen Linie. folglich wird jede Ordinate y durch
dem zugehörige Abscisse x vermittelst einer Gleichu
$y = a - bx$ bestimmt. worinn a und b noch un
kannt, aber für jedes x einerley sind. Außerdem
man $y : y' : y'' \ldots = p : p' : p'' \ldots$ oder $\frac{p}{y} =$ einer
ständigen Größe c.

5) Da P den Kräften p, p' .. äquivallent ist,
ist O der gemeinschaftliche Schwerpunkt von M,
M'' u. s. f., also hat man, weil der Anfangspunkt
dem Schwerpunkte zusammen fällt (§. 32.):

$px + p'x' + p''x'' + \ldots = o$, oder wenn m
für p, p' .. die Werthe cy, c'y' .. substituirt:

$xy + x'y' + x''y'' + \ldots = o.$

6) Man setze ferner für jedes y seinen Werth (
in x ausgedrückt, so wird

$$\left.\begin{array}{l} a\,(x + x' + x'' + \text{u. s. f.}) \\ + b\,(x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{u. s. f.}) \end{array}\right\} = o.$$

oder, wenn man die Summen aller x, und ihrer Q
drate f und g nennt: $af + bg = o$.

7) Außerdem ist $p + p' + p'' + \ldots = P$, u
jedes $p = ca + cbx$, folglich, wenn die Zahl der
terstützungspunkte n heißt,

$P = nca + cb\,(x + x' + x'' \ldots) = nca + cbf.$

8) Diese Gleichung mit der vorigen (6) verbi
den, giebt $ca = \frac{Pg}{ng - f^2}$, $cb = \frac{-Pf}{ng - f^2}$; a
wird $p^{(m)} = ca + cbx^{(m)} = \frac{g - fx^{(m)}}{ng - f^2} \cdot P$

Exempel 1. Für den §. 144. betrachteten Fall ist $x = AG = a$, $x' = BG = -b$, $x'' = CG = c$, folglich $f = a - b + c$, $g = a^2 + b^2 + c^2$, dies giebt $p = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - a^2 + ab - ac}{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a - b + c)^2} \cdot P = \frac{(b^2 + ab - ac + c^2)\,P}{2(a^2 + ab + b^2 + bc - ac + c^2)}$, wie oben.

2. Es liege allemal ein Paar von Unterſtützungspunkten auf verſchiedenen Seiten des Schwerpunktes in gleicher Entfernung davon, und die Anzahl derſelben ſey auf jeder Seite $= m$, ſo hat man $f = o$, $n = 2m$, folglich $p = p' = p'' \ldots = \frac{P}{2m}$, d. i. jede der Stützen trägt ſo viel als die andere.

§. 148.

Wenn ein ſchrägliegender Balken in mehreren Punkten unterſtützt wird, ſo vertheilt ſich ſein Gewicht eben ſo auf dieſe Punkte, als wenn er horizontal läge. Denn es ſey ſein Gewicht $= P$, der Neigungswinkel $= I$, ſo iſt $P \cos I$ der ſenkrechte Druck, den er auf die Unterſtützungspunkte ausübt; für dieſen iſt nun der bisherige Calcul richtig, alſo kommt davon $p \cos I$, $p' \cos I \ldots$ auf die einzelnen Stellen. Damit verbinde man $p \sin I$, $p' \sin I \ldots$, worinn ſich der andere Theil des Gewichtes $P \sin I$ zertheilen läßt, weil er längs dem Balken wirkt (§. 126.), ſo bekommt man p p', $p'' \ldots$ nach vertikalen Richtungen.

§. 149.

Fig. 26. Zur Verminderung der Propulsion eines Daches (§. 133.) dienen auch noch die sogenannten Dachstühle, deren Wirkung aus der bisherigen Theorie von der Vertheilung des Drucks sich leicht bestimmen läßt. Es sey zwischen den Sparren AC und BC des Daches ACB ein Querbalken FG angebracht, der durch die Säulen FH und GI unterstützt ist, so vertheilt sich das Gewicht P der Sparre BC auf die Punkte B, G und C. Wir wollen setzen auf B komme der Theil p, auf C, p' und auf G, p''.

Von diesen zerlege man p' nach den Richtungen Cc und CB, so ist ersterer Theil $=$ p' Cot I, (§. 128.) der durch eine gleiche Kraft von der andern Seite her aufgehoben wird; letzterer Theil ist $=$ p' Sec I, und übt auf den Punkt B einen Druck nach Bp aus.

Das andere Gewicht p'' zerlege man, weil die Sparre in G schräg aufliegt, in eine Kraft nach Gg, senkrecht auf die Sparre, und in eine nach GB, längs derselben. Erstere ist $=$ p'' Cos I, und findet nach GI und GF Widerstand; letztere ist $=$ p'' Sin I und vereinigt sich mit p' Sec I zu einer Kraft $N = \frac{p' + p'' \text{ Sin } I^2}{\text{Sin I}}$ nach Bp.

Hiervon ist der Antheil nach Bq, oder die gesuchte Propulsion des Daches $=$ N Cos I $=$ Cot I $(p' + p'' \text{ Sin } I^2)$.

Exempel. 1. Der Punkt G falle in die Mitte von BC, oder in den Schwerpunkt der Sparre, so ist

$p = p' = p'' = \frac{1}{3} P$, also die Propulsion $= \frac{1}{3} P \operatorname{Cot} I (1 + \operatorname{Sin} I^2)$, die allemal geringer als $\frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I$ ist, wofern $I < 45°$ ist, aber $\frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I$ übertrifft, sobald $I > 45°$ genommen wird.

2. Der Punkt G liege nach oben zu um den vierten Theil der Sparre vom Schwerpunkte entfernt, so ist $c = \frac{1}{2} a$, $p' = \frac{2a^2 - ac + c^2}{6a^2 + 2c^2} . P = \frac{7}{26} P$, $p'' = \frac{2a^2 P}{6a^2 + 2c^2} = \frac{4}{13} P$, folglich die Propulsion $= \frac{1}{26} P \operatorname{Cot} I (7 + 8 \operatorname{Sin} I^2)$, die, wie man sieht, kleiner als die vorige ist, und erst für einen Winkel von $60° = \frac{1}{2} P \operatorname{Cot} I$ wird.

§. 150.

Fig. 31. **Aufg.** Ein Körper, dessen Grundfläche eben und in horizontaler Lage ist, ruhet mit derselben auf mehreren Unterstützungspunkten M, M', M'' u. s. f. Wieviel wird jeder dieser Punkte von seinem Gewichte P zu tragen haben?

Aufl. 1) Man ziehe in der Grundfläche aus einem beliebigen Punkte C zwey Linien CA und CB senkrecht aufeinander, und fälle aus den Punkten M, M' u. s. f. auf CA die Perpendikel MP, M'P' u. s. f., so wird die Lage eines jeden dieser Punkte durch die Coordinaten $CP = x$, und $PM = y$ bestimmt.

2) Ein Perpendikel aus dem Schwerpunkte des Körpers treffe die Grundfläche in O, so ist O der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller der Unterstützungs-

punkte (§. 112. 1.). Es ſey für ihn CD = DO = b.

3) Man ſetze den Druck auf M = p, auf M' p' u. ſ. f., ſo hat man

$$p + p' + p'' \ldots = P, \text{ und wegen n. 2.}$$
$$px + p'x' + p''x'' + \ldots = Pa \text{ (§. 74.)}$$
$$py + p'y' + p''y'' + \ldots = Pb.$$

4) Statt der Stützen denke man ſich wieder t Körper in den Punkten M, M' u. ſ. f. durch einer Fäden gehalten, die dem Drucke unmerklich nachgeb und ſich um unendlich kleine Theile ausdehnen, ſo v halten ſich dieſe Ausdehnungen, die wir z, z', z'' n nen wollen, wie die Kräfte p, p', p'' u. ſ. f., du die ſie hervorgebracht ſind. Man kann alſo $p^{(m)}$ $cz^{(m)}$ ſetzen.

5) Weil die Ausdehnungen wegen der Verſch denheit der Kräfte p, p', p'' u. ſ. f. ungleich ſind, kommt dadurch die Grundfläche in eine etwas ſchi Lage, in der die vertikalen Abſtände der Punkte M, u. ſ. f. von der vorigen Ebene mit den Ausdehnun z, z' u. ſ. f. einerley ſind.

6) Die ſchiefe Grundfläche hat daher x, y und zu Coordinaten, und folglich iſt allgemein $z = f + hy$; denn man weiß, daß unter dieſer Form Gleichung für jede Ebene begriffen iſt, ſie mag e Lage haben, welche ſie will.

7) Daher hat man überhaupt $p^{(m)} = cz^{(m)}$ $cf + cgx^{(m)} + chy^{(m)}$, oder, wenn $cf = A$, $cg = ch = C$ geſetzt wird: $p^{(m)} = A + Bx^{(m)} + Cy^{(m)}$.

8) M

8) Man ſetze nun dieſen Werth für p, p', p'' u. ſ. f. in die drey Gleichungen n. 3., ſo erhält man; wenn der Unterſtützungspunkte n ſind:

$$nA+(x+x'+x''\ldots)B+(y+y'+y''..)C=P,$$
$$A(x+x'+x''..)+B(x^2+x'^2+..)+C(xy+x'y'+..)=Pa$$
$$A(y+y'+y''..)+B(xy+x'y'+..)+C(y^2+y'^2+..)=Pb,$$

oder wenn die einzelnen Summen durch ein fortgeſetztes S bezeichnet werden:

$$nA+B.Sx+C.Sy=P,$$
$$ASx+B.Sx^2+C.Sxy=Pa,$$
$$A.Sy+B.Sxy+C.Sy^2=Pb.$$

woraus die Werthe von A, B und C gefunden werden können.

§. 151.

Zur Erläuterung dieſer allgemeinen Formeln mag folgender beſondere Fall dienen:

§. 32. Ein Tiſchblatt iſt in den vier Punkten A, B, C, D unterſtützt, die in die Eckpunkte eines Rechtecks CBD fallen. Gewichte, womit es beladen iſt, machen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht in die Mitte, ſondern irgendwo in O zu liegen kommt. Wie viel wird jede der Stützen zu tragen haben?

Aufl. 1) Es ſey die ganze Laſt, die auf ihnen ruht, $=P$; die Seite $AC=f$, $BC=g$. Man ziehe durch O mit dieſen Seiten die Parallelen FI und GH, und ſetze noch $CF=a$, $FO=b$, ſo hat man für den

Punkt A, $x = f$, $y = o$; für B: $x' = o$, $y' =$
für C: $x'' = o$, $y'' = o$; für D: $x''' = f$, $y''' =$

2) Folglich wird $Sx = 2f$, $Sy = 2g$, $Sx^2 =$
$2f^2$, $Sy^2 = 2g^2$, $Sxy = fg$, und man erhält dah
die Gleichungen:

$$4A + 2Bf + 2Cg = P$$
$$2Af + 2Bf^2 + Cfg = Pa$$
$$2Ag + Bfg + 2Cg^2 = Pb$$

3) Die erſte mit f multiplicirt, und vom Do
pelten der zweyten abgezogen, läßt übrig:

$$2Bf^2 = (2a - f)P, \text{ oder } B = \frac{(2a - f)P}{2f^2}.$$

Eben ſo erhält man aus der erſten und dritten:

$$2Cg^2 = (2b - g)P, \text{ oder } C = \frac{(2b - g)P}{2g^2}.$$

4) Daraus wird nun $4A + (\frac{2a}{f} + \frac{2b}{g})P = 3P$
folglich: $A = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$, und daher

der Druck auf $A = A + Bf = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

der auf $B = A + Cg = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} + \frac{b}{2g})P$

der auf $C = A = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})P$

und der auf $D = A + Bf + Cg = (\frac{a}{2f} + \frac{b}{2g} - \frac{1}{4})P$.

§. 152.

Eben dieſe Werthe für p, p', p'', p''' findet man

ſehr leicht aus der Betrachtung der möglichſt kleinſten Verſchiedenheit des Druckes. Man hat nemlich dieſer zu Folge:

$pdp + p'dp' + p''dp'' + p'''dp''' = o$ (§. 144. 3.), und dazu kommen noch folgende Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes:

$p + p' + p'' + p''' = P$; $(p + p''')\,f = aP$; $(p' + p''')\,g = bP$ (§. 150. 3.). Dieſe geben, wenn man ſie differenziirt:

$dp + dp' + dp'' + dp''' = o$; $dp + dp''' = o$; $dp' + dp''' = o$, woraus man $dp'' = dp''' = -dp$ und $dp' = +dp$ erhält.

Schafft man damit dp', dp'' und dp''' aus der erſten Gleichung weg, ſo wird: $p + p' - p'' + p''' = o$, und dieſe Gleichung mit der zweyten: $p + p' + p'' + p''' = P$ verbunden, giebt $2p + 2p' = P$, $2p'' + 2p''' = P$, oder $p' = \frac{1}{2}P - p$, $p''' = \frac{1}{2}P - p''$. Daher $(p - p'')\,f = (a - \frac{1}{2}f)\,P$ und $(p + p'')\,g = (g - b)\,P$, alſo $p = (\frac{1}{4} + \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})\,P$, $p'' = (\frac{1}{4} - \frac{a}{2f} - \frac{b}{2g})\,P$, wie vorhin.

§. 153.

Bisher haben wir die Stellen, wo die Laſt unterſtützt iſt, als bloße Punkte betrachtet; ſie kann aber auch durch eine ganze Fläche getragen werden, und alsdann breitet ſich der Druck über dieſe nach allen Seiten aus, und jede ihrer Stellen übernimmt einen Theil davon. Vertheilt ſich der Druck auf die Fläche gleichför-

mig, ſo bekommt das eine Stück derſelben nach Verhältniß ſeines Raumes nicht mehr davon, als das andere, oder, wenn s einen Theil der Fläche bedeutet, π den Theil des ganzen Druckes, der auf ihn kommt, ſo iſt $\frac{\pi}{s} = p$ an allen Stellen einerley. Bey ungleichförmigen Drucke hingegen iſt dies p, die Einheit des Druckes, an verſchiedenen Stellen verſchieden, und es entſteht dann die Frage, wie groß p für jedes beſondere Element der Fläche ſey, oder mit andern Worten: wie ſtark die Fläche in den einzelnen Punkten gedrückt werde.

§. 154.

Die Auflöſung dieſes Problems unterſcheidet ſich von dem in §. 150. betrachteten Falle nur bloß dadurch, daß jetzt der Druck auf unendlich viele Stellen ſich vertheilt, alſo CP = x, PM = y nicht mehr Coordinaten für einzelne Punkte, ſondern für jeden Punkt M der gegebenen Fläche bedeuten. Man ſtellt ſich daher die Fläche in lauter rechtwinkliche und gleiche Elemente getheilt vor, die durch die Aenderungen von x und y entſtehen, alſo dxdy zum Inhalte haben, und nenne den Druck auf jedes derſelben dπ, ſo iſt dπ ein unendlich kleiner Theil von P, und nach der Lage des Elementes veränderlich. Nach §. 150. hat man nemlich $d\pi = A + Bx + Cy$: da aber, wie man ſieht A, B, C, hier unendlich klein, und dem Flächenraume dxdy proportional ſeyn müſſen, ſo ſetze man

Fig. 31.

$A = \alpha dxdy$, $B = \beta dxdy$, $C = \gamma dxdy$; alsdann bekommt man für die Einheit des Druckes: $p = \frac{\pi}{dxdy} = \alpha + \beta x + \gamma y$. Zugleich aber ändern sich auch die Gleichungen (ebendas.) in so fern ab, daß die dortigen Summen sich in Integrale verwandeln, die über die ganze Fläche genommen werden müssen. Es sey K der ganze Flächenraum, so ist $ndxdy = K$, also $nA = n\alpha dxdy = K\alpha$, folglich:

$$K\alpha + \beta\iint xdxdy + \gamma\iint ydxdy = P.$$

$$\alpha\iint xdxdy + \beta\iint x^2dxdy + \gamma\iint xydxdy = Pa$$

$$\alpha\iint ydxdy + \beta\iint xydxdy + \gamma\iint y^2dxdy = Pb.$$

woraus sich α, β und γ, also auch p für jede Stelle der Fläche bestimmen läßt.

§. 155.

Die Integrale in diesen drey Gleichungungen sind doppelt, d. h. man muß jedes Differenzial erst für einerley x bis an den Umfang der Fläche summiren, und dann beym Kommenden nochmal die Integration nach x anstellen. Es sey nun für den Umfang der Fläche $y = Y$, so wird:

$\iint xdxdy = \int Yxdx$. $\iint ydxdy = \frac{1}{2}\int Y^2dx$, $\iint x^2dxdy = \int Yx^2dx$, $\iint xydxdy = \frac{1}{2}\int Y^2xdx$ und $\iint y^2dxdy = \frac{1}{3}\int Y^3dx$; wodurch die Gleichungen folgende Form bekommen:

$$K\alpha + \beta\int Yxdx + \frac{1}{2}\gamma\int Y^2dx = P.$$

$$\alpha\int Yxdx + \beta\int Yx^2dx + \frac{1}{2}\gamma\int Y^2xdx = Pa$$

$$\frac{1}{2}\alpha\int Y^2dx + \frac{1}{2}\beta\int Y^2xdx + \frac{1}{3}\gamma\int Y^3dx = Pb.$$

[illegible] Grenzlinien der Fläche bestimmen [illegible]
[illegible] Theil des Umfangs Y durch [illegible]
[illegible] jetzt nur noch Ausdrücke zu inte[illegible]
[illegible] als veränderliche Größe vorkommen.

§. 156.

[illegible] der Umfang der Fläche von solcher Beschaffenheit, daß es einen Punkt in ihr giebt, durch [illegible] Linien senkrecht aufeinander ziehen lassen. [illegible] jede die Fläche in zwey gleiche und [illegible] theilt, so nehme man diesen Punkt zum An[illegible] der Abscissen und eine dieser Linien zur Ab[illegible] an. Alsdann ist die Summe der Elemente [illegible] also für einerley x, positiv oder negativ [illegible] gleich groß; daher sind allemal zwey [illegible] auf verschiedenen Seiten des Anfangspunkts zusammengenommen $= 0$, folglich auch die Summe $\int Yxdx = 0$.

Da ferner $ydxdy$ für einerley x und gleich gegengesetzte y gleich und entgegengesetzt ist, so solche zwey $ydxdy$ zusammen genommen $= 0$, so auch das ganze $\iint ydxdy$, oder $\int Y^2dx = 0$.

Eben dies erhellet von dem Integrale $\iint xy$[illegible] so daß also die drey Gleichungen für gegenwärtigen Fall auf folgende zurückgebracht werden:

$$K\alpha = P$$
$$4\beta\int Yx^2dx = Pa$$
$$\tfrac{4}{3}\gamma\int Y^3dx = Pb$$

Daher wird $p = \alpha + \beta x + \gamma y = \frac{P}{K} + \frac{Pax}{4\int Yx^2dx} + \frac{3Pby}{4\int [illegible]dx}$.

Exempel 1. Es sey die Fläche ein Rechteck, deſſen Höhe $= f$, und deſſen Grundlinie $= g$ seyn mag, so hat man, wenn man die Abſciſſenlinie der Höhe parallel nimmt, $Y = \frac{1}{2} g$, also $\int Yx^2dx = \frac{1}{6} gx^3$, welches für $x = \frac{1}{2} f$, $= \frac{1}{48} gf^3$ wird. Ferner wird $\int Y^3dx = \frac{1}{16} g^3 f$ und $K = fg$, $y = \frac{1}{2} g$, also $p = \frac{P}{fg} + \frac{12Pax}{gf^3} + \frac{12Pby}{fg^3} = \frac{P}{fg}(1 + \frac{12ax}{f^2} + \frac{12by}{g^2})$.

Exempel 2. Die Fläche sey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $= f$ iſt, so hat man $Y^2 = f^2 - x^2$; also, wenn man $x = f \operatorname{Sin} \vartheta$ ſetzt, $Y = f \operatorname{Cos} \vartheta$, folglich $Yx^2dx = f^4 \operatorname{Sin} \vartheta^2 \operatorname{Cos} \vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{4} f^4 . \operatorname{Sin} 2\vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{8} f^4 (1 - \operatorname{Cos} 4\vartheta) d\vartheta$ und daher $\int Yx^2dx = (\frac{1}{8}\vartheta - \frac{1}{32} \operatorname{Sin} 4\vartheta) f^4$. Für $x = f$ iſt nun $\operatorname{Sin} \vartheta = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2} \pi$, also der vollſtändige Werth des Integrals $= \frac{1}{16} \pi f^4$.

Auf gleiche Art findet man $\int Y^3dx = \frac{3}{16} \pi f^4$; daher wird: $p = \frac{P}{\pi f^2} + \frac{4Pax}{\pi f^4} + \frac{4Pby}{\pi f^4} = \frac{P}{\pi f^2}(1 + \frac{4ax + 4by}{f^2})$.

§. 157.

Es wird bey dieſer Berechnung allemal vorausgeſetzt, daß nur auf den Theil der Fläche, der von der

Grundfläche des Körpers bedeckt wird, der Druck ſich verbreite. Ragt dagegen die Grundfläche an den Seiten über den Umfang hervor, ſo wird begreiflich dadurch der Druck im Ganzen genommen weder größer noch geringer, weil die Fläche alsdann noch eben ſo gut das ganze Gewicht des Körpers zu tragen hat, aber die Einheit des Druckes iſt in dieſem Falle deſto größer, je geringer der Flächenraum iſt, der die Laſt übernimmt.

§. 158.

Wenn der Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Fläche fällt, ſo iſt $a = b = o$, folglich $p = \frac{P}{K}$, oder **der Druck vertheilt ſich alsdann gleichförmig über die Fläche.** Dieſer merkwürdige Satz beſchränkt ſich ohne Zweifel nicht bloß auf ebene Flächen, ſondern gilt gewiß auch da, wo überhaupt eine krumme Fläche, die irgendwo einen Mittelpunkt hat, mit einem Körper beſchwert wird, deſſen Grundfläche in jene hineinpaßt, und deſſen Schwerpunkt vertikal über erwähntem Mittelpunkte liegt. So z. B. wird die Schüſſel, in der man die Linſengläſer ſchleift, allenthalben gleich ſtark gedrückt werden, wenn die auf den Druck verwandte Kraft genau durch die Axe derſelben geht. Auch gehört die Schraubenfläche hieher, auf die ſich allemal die Laſt gleichförmig vertheilt, ſobald ihr Schwerpunkt in die Spindel der Schraube fällt. Ich kann mich hier nicht darauf einlaſſen, dieſe höchſt wahrſcheinliche Vermuthungen darzuthun; wie wichtig aber gute

Unterſuchungen hierüber ſind, erhellet allein daraus, daß aus Mangel an denſelben die Theorie der Friction krummer Flächen beynahe noch ganz im Dunkeln liegt.

Anmerk. Die letzten §§ dieſes Kapitels hat Euler in Nov. Comment. Petrop. Tom. XVIII. umſtändlich abgehandelt; ſonſt wüßte ich aber keinen Schriftſteller zu nennen, der über dieſe Materie etwas Entſcheidendes geliefert hätte: denn ſowohl Lambert *) als Delanges **) begnügen ſich bloß mit den gewöhnlichen Bedingungen des Gleichgewichtes, die doch, wie D'Alembert ***) zeigt, die Aufgabe allemal unbeſtimmt laſſen, und alſo zu deren Auflöſung für ſich nicht zureichend ſind. Eulers Verfahren allein verbreitet über die Sache Licht, und erhält durch die Uebereinſtimmung mit den meinigen, wie ich glaube, völlige Beſtätigung.

Fünftes Kapitel.

Von der Spannung biegſamer Fäden.

§. 129.

§. 33. Wenn man einen Faden AMB mit dem einen Ende an einen unbeweglichen Punkt A befeſtigt, und an ſeinem andern Ende B eine Kraft P ziehen läßt, ſo ſtreckt dieſe den Faden in eine gerade Linie, die mit der Richtung der Kraft zuſammenfällt.

Es ſey z. B. P ein angehängtes Gewicht, ſo wird

*) Beyträge zum Gebrauche der Math. 2. Th.

**) Memorie di Mat. e Fiſica della Soc. Ital. Tom. V. p. 107.

***) Opuſcules de Mathem. Tom. VIII. pag. 36.

diesem der Faden wegen seiner Biegsamkeit so lange nachgeben, bis es so tief als möglich gesunken ist; dies geschieht aber nur dann, wenn die Punkte A, M und B in einer gerahen Linie liegen, die vertikal herabläuft.

§. 160.

Durch den Zug der Kraft wird der Faden in einen gewaltsamen Zustand versetzt, den man die Spannung desselben nennt. Sie richtet sich nach der Größe der Kraft, und erstreckt sich der Länge nach auf alle Theile des Fadens in gleichem Grade.

Jeder Punkt M wird nemlich von der Kraft I nach MB gezogen, und da er nicht weichen kann, durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft angehalten; also wirkt auf alle Punkte des Fadens dieselbe Kraft = I nach entgegengesetzten Richtungen, und spannt den Faden an allen Stellen gleich stark.

§. 161.

Daher pflanzt sich die Kraft durch den Faden an den Punkt A fort, oder wirkt auf ihn eben so, als wär sie unmittelbar darauf angebracht, folglich muß diese mit gleicher Kraft nach entgegengesetzter Richtung Widerstand leisten. Statt also den Punkt A zu befestigen kann man eine entgegengesetzte Kraft = P auf ihn anbringen, ohne dadurch das Gleichgewicht aufzuheben; dies leitet auf folgende Sätze:

1. Zwey gleiche Kräfte, jede = P, die nach gegengesetzten Richtungen an einem Faden ziehen

nen ihn nach dieſer Richtung in eine gerade Linie aus, und halten einander an demſelben das Gleichgewicht.

2. Gegenſeitig, wenn zwey Kräfte an dem Faden im Gleichgewichte ſeyn ſollen, ſo müſſen ſie gleich und entgegengeſetzt ſeyn.

3. Der Faden leidet zwiſchen dieſen beyden Kräften allenthalben die Spannung = P.

§. 162.

Fig. 34. **Aufgabe.** Es ſind auf die Punkte A, B und F eines biegſamen Fadens drey Kräfte P, Q und R nach den Richtungen Aa, Bb und Ff angebracht; man ſucht die Umſtände, unter denen ſie einander das Gleichgewicht halten werden.

Aufl. 1) Da die Kraft P aufgehoben wird, ſo muß in F eine gleich große Kraft nach entgegengeſetzter Richtung Fα ziehen, alſo der Theil AF in eine gerade Linie ausgeſpannt werden, die mit Aa, der Richtung von P, zuſammenfällt.

2) Eben ſo muß der Kraft Q eine gleiche Kraft nach Fβ entgegenwirken, alſo der Theil des Fadens FB die Lage Bb erhalten, und

3) den beyden nach Fα und Fβ gerichteten Kräften muß die Kraft R äquipollent ſeyn.

4) Setzt man daher den Winkel fFα, den Aa und Ff, die Richtungen der Kräfte P und R, miteinander machen = η; den Winkel fFβ der Richtungen Bb und Ff = ϑ, ſo hat man als Bedingungen des Gleichgewichtes (§. 52.)

$P \sin \eta = Q \sin \vartheta$

$R \sin \eta = Q \sin (\eta + \vartheta)$

5) Die Spannungen der Theile AF und FB ſind $= P$ und Q.

§. 163.

Fig. 35. Wenn ein Pferd vor einem Schlitten oder Wagen zieht, ſo wirken auf den Punkt F, wo das Zugſeil eingehängt iſt, drey verſchiedene Kräfte. Der Bruſtriemen wird durch das Anziehen des Pferdes nach horizontaler Richtng FA geſpannt; das Zugſeil, wenn es in B an der fortzuziehenden Laſt befeſtigt iſt, überträgt die Rückwürkung dieſes Punktes auf F nach der ſchiefen Richtung FB, und der Sattelriemen widerſteht vertikal aufwärts nach Ff.

Um hierbey die Erforderniſſe des Gleichgewichtes zu beſtimmen, ſetze man den Widerſtand, den die Laſt dem Zuge nach horizontaler Richtung oB entgegenſetzt, $= R$, die Kraft, die das Pferd nach FA anwendet, $= M$, den Gegendruck nach $Ff = \Pi$, die Spannung des Zugſeils $= F$, ſeine Schiefe, oder den Winkel $FBo = \varepsilon$, ſo erhält man, weil $AFo = 90°$ iſt:

1) $\left.\begin{matrix} M = T \cos \varepsilon \\ \Pi = T \sin \varepsilon \end{matrix}\right\}$ (§. 49.)

folglich $\Pi = M \operatorname{tang} \varepsilon$.

2) Durch die Spannung des Seiles wird in B ein Zug nach BF bewirkt. Man zerlege dieſe Kraft in eine nach der Horizontale $Bo = T \cos \varepsilon$, und eine nach der Vertikale $Bp = T \sin \varepsilon$; letztere ſtrebt den Punkt

B vertikal zu heben, und wird durch das Gewicht des Wagens aufgehoben; erstere T Cos ε soll gerade so groß seyn, als nöthig ist, den Widerstand R zu überwinden, folglich muß T Cos $\varepsilon = R$ seyn.

3) Dies mit dem Vorigen (1) verglichen, giebt $M = R$.

Das Seil mag also nach einer Richtung gespannt werden, nach der man will, so hat das Pferd doch immer eben die Kraft nach FA anzuwenden, als wenn es unmittelbar am Punkte B nach Bo zöge.

4) Außerdem leidet aber sein Rücken durch die Spannung des Sattelriemens den vertikalen Druck $\Pi = R \tang \varepsilon$ (1. 3.), der, wie man sieht, für einerley R desto größer ist, je mehr BF von der Horizontale abweicht.

5) Man setze die Länge des Seiles $BF = l$, den Theil Fo der Vertikale, um den die Brust des Pferdes höher liegt, als der Punkt B, $= a$, so ist $Bo = \sqrt{(l^2 - a^2)}$, also $\tang e = \frac{a}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$, und $\Pi = \frac{Ra}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

Anmerkung. So hat Couplet *) und nach ihm Müller **) die Sache betrachtet. Allein, da der Zug durch zwey Seile geschieht, so vertheilt sich die Kraft und die Spannungen der beyden Riemen so wie die des Seiles werden dadurch halb so groß, als sie vorhin angegeben sind. Indeß ändert dies in den Werthen für M und Π nichts: denn wir werden nach-

*) Mem. de l'Acad. de Paris 1735.

**) Versuch einer system. Abh. über das Fuhrwesen, Göttingen 1787.

her ſehen, daß ein Faden, der über einen cylindriſchen Körper AEB geht, und an ſeinen Enden A und B nach parallelen Richtungen Aa und Bb beſpannt wird, im Punkte D nach derſelben Richtung DC einen Druck ausübe, der doppelt ſo groß als die Spannung iſt.

§. 164.

Folgerung 1. Für einerley R und l iſt Π deſto größer, je größer a iſt, oder je tiefer der Punkt B unter die Horizontale AF fällt. Beym Schlitten liegt dieſer Punkt immer ſehr niedrig; beym Wagen, wegen der Räder, höher: dies zeigt, wie ſehr ſchon deshalb allein der Wagen dem Schlitten vorzuziehen iſt.

2. Was den Wagen anbetrifft, ſo zeigt ſich hier ein neuer Vortheil der hohen Räder vor den niedrigen; beſonders gilt dieſer in Bezug auf die Vorderräder, die man gewöhnlich kleiner als die Hinterräder annimmt. Dieſe Einrichtung hat gewiß manche Bequemlichkeit: aber ob der vorzüglichſte Nutzen, den ſie gewähren ſoll, nicht ſcheinbar iſt? fragt ſich doch noch. Daß das Umwenden dadurch erleichtert werde, iſt, wie Camus gezeigt hat *), ein bloßer Irrthum; im Gegentheile wird durch ungleiche Räder die Friktion am Nägel, der dadurch einen Seitendruck leidet, vermehrt, alſo das Umdrehen erſchwert.

3. Für einerley R und a iſt Π deſto geringer, je größer man l nimmt; verſchwindet aber nie ganz, ſo groß auch l ſeyn mag. Wofern alſo nicht a = o iſt, hat das Pferd jedesmal immer vertikalen Druck auszu-

*) Traité des forces mouvantes propoſition XXX.

ſtehen, den man durch eine gehörige Länge des Zugſeiles in ſo weit nur vermindern kann, daß er das Pferd auf die Länge der Zeit nicht ermüdet.

4. Weiß man daher wie viel Gewicht ein Pferd auf längere Dauer zu tragen im Stande iſt, ſo läßt ſich daraus berechnen, wie lang das Seil ſeyn muß, um nicht mehr Druck als dieſen zu verurſachen; man hat nemlich $l = \frac{a\sqrt{(R^2+\Pi^2)}}{\Pi}$.

Exempel. Es ſey $R = 572$ ℔, $\Pi = 96$ ℔, die Höhe der Bruſt des Pferdes $= 4$ Fuß, der Halbmeſſer des Vorderrades $= 3$ Fuß, ſo iſt $a = 1$ Fuß, $\sqrt{(R^2+\Pi^2)} = \sqrt{336400} = 580$, alſo $l = 6\frac{1}{24}$ Fuß oder 6 Fuß $\frac{1}{2}$ Zoll.

5. Bey einer Reihe von Pferden theilt ſich R in ſo viele M, als ihre Anzahl ausmacht. Sind ſie alle gleich groß, ſo ſind die Zugſeile, außer dem letzten, alle horizontal geſpannt, folglich leidet dann das letzte Pferd den Druck Π allein. Soll daher von dieſem Drucke auch das vorletzte Pferd einen Theil übernehmen, ſo muß es größer als das letzte ſeyn. Es gewährt alſo einigen Vortheil, wenn man die größern Pferde vorangehen, und das kleinſte zuletzt folgen läßt.

§. 165.

Fig. 36. Wenn mehrere Kräfte an einem Faden AEFB ſich im Gleichgewichte erhalten, ſo wird, wie bey dreyen Kräften (§. 162.), jeder Theil deſſelben zwiſchen zwey zunächſt liegenden Punkten in eine gerade Linie ausge-

[illegible] muß jede Kraft, wenn man sie an [illegible] nach den Richtungen Ex und Ey [illegible] Theile EA und EF zerlegt, auf bey[illegible] [illegible] Kräften, die nach entgegenge[illegible] [illegible] Ax und FD wirken, aufgehoben wer[illegible] [illegible] würde der Punkt E entweder nach Ea [illegible] also das Gleichgewicht nicht statt fin[illegible] Diese gleichen und entgegengesetzten Kräfte brin[illegible] die Spannungen der einzelnen Theile des [illegible] hervor.

§. 166.

[illegible] Wenn auf den Faden AYS unendlich viel [illegible] wirken, und jede einzelne von ihnen auf einen [illegible] andern Punkt angebracht ist, so liegen zwey solcher Punkte Y und y unendlich nahe beysammen, und die [illegible] genannten geradlinigten Theile des Fadens sind un[illegible] klein. Alsdann hat also jedes Element dessel[illegible] eine andere Lage als das nächstfolgende, und der ganze Faden ist folglich in eine Curve gebogen.

§. 167.

Um sich von der Biegsamkeit eines Fadens eine deutliche Vorstellung zu machen, kann man sich gedenken, er bestehe aus lauter unendlich kleinen geradlinigten Theilen, die an sich unbiegsam, aber durch Gelenke so mit einander verbunden sind, daß sie sich um diese nach jeder Richtung drehen lassen. Ist alsdann ein solches Element zweyen gleichen und entgegengesetzten Kräften ausgesetzt, die an seinen Endpunkten seiner

Länge

ige nach ziehen, ſo bleibt daſſelbe unbeweglich, und
an dies bey allen Elementen des Fadens der Fall iſt,
ſt alles am Faden im Gleichgewichte.

§. 168.

Wenn die Kräfte nicht unmittelbar in den Liga-
nten des Fadens angebracht ſind, ſondern auf die
mente ſelbſt wirken, wie z. B. wenn dieſe für ſich
Gewicht haben, ſo kann man die Elemente wegen
er Unbiegſamkeit als kleine Hebel anſehen, und folg-
) die Kräfte auf ihre Verbindungspunkte vertheilen;
ſo kommt dieſer Fall doch auf den im §. 166. ange-
nmenen zurück.

§. 169.

137. **Aufgabe.** Es wirken auf jedes Element Yy
es Fadens zwey Kräfte, die der Länge deſſelben ds
portional ſind; eine = pds nach der Tangente YT,
eine = qds nach der darauf ſenkrechten Richtung
; man fragt 1) wie dieſe Kräfte den Faden krüm-
n werden, 2) wie groß die Spannung eines jeden
mentes ſey.

Aufl. 1) Da die Kraft pds längs Yy wirkt, ſo
n ſie auf jeden Punkt dieſes Elementes verlegt wer-
; man bringe ſie daher auf den Punkt y an.

2) Die ſenkrechte Kraft qds vereinigt ihre Wir-
ung im Schwerpunkte des Elementes Yy; wenn man
dieſe auf die Punkte Y und y vertheilt, ſo kommt
jeden $\frac{1}{2}$ qds. Wir betrachten hier nur den auf y
fallenden Theil nach yN.

... kommt von der Normalkraft (q-
... die auf das nächstfolgende Element yυ wirk
... den Punkt y der Theil $\frac{1}{2}$ ds $(q + \frac{1}{2}q)$ nach d
... senkrechten Richtung yn, so daß auf dieſe
Punkt drey äußere Kräfte gerichtet ſind.

4) Es ſey nun die Spannung des Elementes Y
$= T$, die des nächſt folgenden $y\upsilon = T'$, ſo iſt $T' =$
$T + dT$. Durch erſtere wird der Punkt y nach y'
gezogen, durch letztere nach yυ.

5) Alſo wirken auf den Punkt y in Allem fü
Kräfte (3. 4.), oder, weil T und dp ſich zu $T + d$
vereinigen, nur vier Kräfte, die an demſelben im Gleic
gewichte ſeyn müſſen.

6) Es ſey der Winkel TYX, den die Tangen
des Elementes Yy mit der Ordinate YX macht, $= \varphi$
ſo iſt $tyx = \varphi + d\varphi$, alſo $Tyt = d\varphi = Nyn$.

7) Von der Kraft $\frac{1}{2}$ ds $(q + dq)$ kommt d
Theil $\frac{1}{2}$ dqds, als ein unendlich Kleines der zweyt
Ordnung, gegen die übrigen Kräfte nicht in Betrach
Man zerlege nun das zurückbleibende $\frac{1}{2}$qds in ein
Theil nach yN, und in einen nach der Verlängerun
von Ty, ſo iſt erſterer $= \frac{1}{2}$ ds Cos $d\varphi = \frac{1}{2}$ qds, der ſi
mit $\frac{1}{2}$ qds (2) zu qds vereinigt, letzterer $= \frac{1}{2}$ qds Si
$d\varphi = \frac{1}{2}$ qdsdφ, der gegen die anderen Kräfte wegfäl

8) Es bleiben daher am Punkte y nur noch d
Kräfte $T + dp$ nach yT, qds nach yN, und $T + d$
nach yυ zurück, wovon alſo letztere, wenn man ihr di
entgegengeſetzte Richtung yt giebt, den andern beyde
äquipollent ſeyn muß.

9) Dieſem zu Folge zerlege man $T + dT$ nach
n Richtungen yT und yN, ſo kommt auf erſtere der
eil $(T + dT)\ \mathrm{Cos}\ d\varphi = T + dT$, auf letztere
$+ dT)\ \mathrm{Sin}\ d\varphi = (T + dT)\, d\varphi = Td\varphi$, und
m hat folglich:

$$T + dT = T + dp, \text{ oder } dT = dp \text{ und}$$
$$Td\varphi = qds.$$

10) Nennt man r den Krümmungshalbmeſſer
Elements Yy, ſo iſt bekanntlich $r = \frac{ds}{d\varphi}$, alſo
$= \frac{qds}{d\varphi} = qr$, und $dp = dT = rdq + qdr$, wo-
ch ſowol die Natur der Curve wie auch die Span-
ng T beſtimmt wird.

§. 170.

Die gefundenen Gleichungen zeigen nicht bloß,
der Faden durch gegebene Kräfte gebogen wird,
dern ſie beſtimmen gegenſeitig auch die Kräfte, denen
Faden ausgeſetzt ſeyn muß, wenn er eine gegebene
mmung annehmen ſoll.

. 78. Wird daher ein Faden über einen cylindriſchen
per gelegt, und an ſeinen Enden Aa, Bb ſtraff an-
gen, ſo nimmt er die Form ADB vom äußern Um-
ge des Körpers an, und die Kraft, die ihn in dieſe
mmung verſetzt, beſteht alsdann in dem Drucke,
der Körper auf jedes ſeiner Elemente ausübt.

Man hat alſo in dieſem Falle $pds = o$, und es
nur übrig, aus der gegebenen Form der Linie

ADB die Kraft qds zu bestimmen, oder anzu wie stark der Faden in jedem einzelnen Punkte drückt wird.

Dadurch erhält man dann zugleich T, die E nung jedes Elementes; folglich auch die Spannur Enden Aa und Bb, oder die Kräfte, die erford sind, einander an dem gebogenen Faden das Gle wicht zu halten.

§. 170.

1. Da $p = o$ ist, so ist auch $dT = dp$ folglich $T =$ einer beständigen Größe G. Der F leidet also allenthalben dieselbe Spannung; daher sen die beyden Kräfte die an seinen Enden ziehen, sich im Gleichgewichte zu erhalten, gleich groß ohne daß ihre Richtungen Aa und Bb dabey weit Betracht kommen.

2. Hierdurch wird ferner $qr = G$; also hat $q = \frac{G}{r}$ für die Einheit des Druckes (§. 153.) an Stelle Y, für welche r den Krümmungshalbmesse deutet. Der Faden ist folglich da einem größern D ausgesetzt, wo er sich mehr krümmen muß.

3. Der Körper leidet in jeder Stelle Y durch Faden eben den Druck $qds = \frac{Gds}{r} = Gd\varphi$, nur entgegengesetzter Richtung Yr. Zerlegt man d nach der Ordinate YX und der darauf senkrechten mit der Axe AB parallelen Richtung, so ist er

aft = GdΦ Cos rYX = GdΦ Sin Φ, letztere = Φ Cos Φ.

§. 172.

Wenn die beyden Arme AYD und DyB gleich d ähnlich sind, so heben sich von dem Drucke in Y d y die beyden Theile nach der mit AB parallelen chtung, als gleiche und entgegengesetzte Kräfte, auf; andern beyden kommen auf die Punkte X und x, d da diese gleiche Entfernung von C haben, so ver- igen sie sich in diesem Punkte zu 2GdΦ Sin Φ.

Da dies von jedem Paare entgegengesetzter Ele- nte gilt, so folgt, daß die Richtung des gesammten ucks durch DC gehen muß. Man nenne diesen Π, hat man $\frac{1}{2}\Pi = \int GdΦ$ Sin $Φ = C - G$ Cos Φ n A bis D genommen.

Es sey nun Φ für das erste Element bey $A = α$, wird: $C - G$ Cos $α = o$, und weil bey D der inkel $Φ = 90°$ ist, $\frac{1}{2}\Pi = C = G$ Cos $α$, also Π : 2G Cos α.

Sind daher die Richtungen der Kräfte, die an A d B ziehen, mit CD parallel, so ist $α = o$, folglich = 2G d. i. die beyden Kräfte üben dann einen Druck rch Hülfe des Faden aus, als wären sie unmittelbar f C angebracht.

Die Rolle.

§. 173.

Der Gebrauch der einfachen Rolle beruhet auf der genschaft des biegsamen Fadens, daß er die Wür-

kung einer Kraft, die an ſeinem einen Ende zieht, au
wenn er gekrümmt iſt, auf das andere Ende fortpflan
(§. 171. 1.). Läßt man nemlich über die Rolle e
Seil gehen, ſo kann man dies von ihr nach Gefall
wieder ablenken, und dadurch einer Laſt, die an der
nen Seite hängt, auf der andern Seite mit eben d
Kraft nach jeder willkührlichen Richtung das Gleichg
wicht halten.

Um den Druck zu beſtimmen, den dabey die A
der Rolle leidet, ziehe man durch die Punkte A und
Fig. 39. wo das Seil die Rolle verläßt, die Linie A
und ſetze den Winkel BFA, den die Richtungen d
Kraft und Laſt Aa und Bb mit einander machen, =
ſo weiß man, daß CF die Sehne AB ſenkrecht halbi
alſo iſt hier CFB $= \frac{1}{2}\vartheta = \alpha$ (§. 172.), folglich d
geſuchte Druck $\Pi = 2\,G\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\vartheta$, und der Wink
den ſeine Richtung FC mit der Verlängerung von A
oder Bb macht, $= \frac{1}{2}\vartheta$.

Sind die Richtungen der Kraft und Laſt eina
der parallel, ſo iſt $\vartheta = 0$, alſo $\Pi = 2G$, d. i. d
Punkt C hat, wie beym Hebel, beyde gemeinſchaftl
zu tragen.

§. 174.

Fig. 39. Wenn an der Axe der Rolle eine Kraft P n
irgend einer Richtung CF zieht (die in die Ebene d
Rolle fällt), und von zweyen andern Kräften verm
telſt eines Seiles bBAa, das um die Rolle gelegt
im Gleichgewichte gehalten werden ſoll, ſo müſſen

1) die beyden Kräfte einander gleich ſeyn.

Ferner muß der Druck, den ſie auf den Punkt C durch die Spannung des Seiles hervorbringen (§. 173.), der Kraft P gleich und entgegengeſetzt ſeyn; alſo müſſen

2) ihre Richtungen verlängert ſich in einem Punkte F ſchneiden, der in die Richtung von P fällt, oder der Bogen AB, den das Seil bedeckt, muß von CF halbirt werden.

Dies vorausgeſetzt, ſey jede derſelben $= V$, der Winkel AFB, den ihre Richtungen Aa und Bb miteinander machen, $= \vartheta$, ſo hat man $P = 2V \cos \frac{1}{2}\vartheta$, alſo $V = \frac{P}{2 \cos \frac{1}{2}\vartheta}$.

Wenn P eine Laſt iſt, die vertikal herab zu ſinken ſtrebt, und die beyden Kräfte vertikal aufwärts ziehen, ſo iſt $\vartheta = 0$, alſo $V = \frac{1}{2}P$; folglich wird alsdann die Laſt unter die beyden Kräfte vertheilt.

Schleife (Noeud coulant).

§. 175.

Die Rolle überträgt die gleiche Spannung des Seiles von der einen Seite zur andern, man mag ſie ſo klein annehmen, als man will: alſo gilt dies auch noch, wenn man das Seil durch einen Ring oder eine Schleife gehen läßt, weil da der Streif, den das Seil umſchließt, als eine kleine Rolle angeſehen werden kann. Die Schleife oder der verſchiebbare Knoten an einem

Seile ist also von dem unbeweglichen darinn ganz verschieden, daß bey ersterem die Kraft, die an ihm zieht die Theile des Seiles allemal gleich stark spannt; bey letzterem hingegen eine ungleiche Spannung entstehen kann.

§. 176.

Fig. 40. **Aufgabe.** An einem Seile, das in A und B befestigt ist, hängt vermittelst eines Ringes oder einer Schleife ein Gewicht P; man sucht 1) den Punkt G, wo der Ring eingreift, und 2) die Spannung des Seiles.

Aufl. 1) Es sey die Länge des Seiles $= l$, die horizontale Distanz AD der Punkte A und B $= a$, die vertikale BD $= b$; man fälle GE senkrecht auf AD, und setze AE $= x$, EG $= u$.

2) Da GE in die Richtung des Gewichtes fällt, so wird dadurch der Winkel AGB, den wir ϑ nennen wollen, halbirt §. 173.). Außerdem ist die Spannung T der beyden Theile AG und GB gleich groß, und

$$T = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\vartheta}$$ (§. 175.).

3) Man verlängere AG, bis sie die Vertikale BD in I schneidet, so ist AIB $=$ AGE, EGB $=$ GBI, also sind die Winkel bey B und I einander gleich, folglich GI $=$ GB, und AI $= l$.

4) Im Dreyecke ADI ist $\operatorname{Sin} AIB = \frac{AD}{AI}$, oder

$\sin \frac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{l}$, also $\cos \frac{1}{2}\vartheta = \frac{\sqrt{(l^2 - a^2)}}{l}$, und da-

$T = \frac{\frac{1}{2} Pl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

5) Ferner $AG = GO = \frac{AE}{\sin AGE} = \frac{xl}{a}$; BO

$\frac{BD}{\cos DBO} = \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$; also $AG + GO + OB$

$\frac{2xl}{a} + \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}} = l$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ba}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$

$u = x \cot \frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{(l^2 - a^2)} - \frac{1}{2}b$.

§. 177.

Die Spannung T wächst ins Unendliche, wenn h a der Grenze l nähert. Man sieht hieraus, daß e geringe Last das Seil mit erstaunender Kraft zu nnen vermag, wofern es schon an sich durch die Be- ligung an den Punkten A und B beynahe in eine ge- e Linie angezogen ist.

Daher kann man den hartnäckigsten Widerstand mittelst eines Seiles oder einer Kette zum Weichen ngen, so bald man nur zwey feste Punkte A und B der Nähe hat; wenn man nemlich die Kette, nach- n man sie an dem Widerstande befestigt hat, bey A er eine Rolle gehen läßt, und sie dann, straff ange- gen, an den Punkt B heftet, so bedarf es nur in den ifsten Fällen nur eines geringen Gewichtes, das man Kette innerhalb A und B anhängt, um die verlangte irkung hervorzubringen.

Rollenzug.

§. 178.

Eine Verbindung von Rollen vermittelst mehrerer Seile, die dazu dient die aufzuhebende Last unter sich theilen, heißt ein **Rollenzug**.

Man kann ihn auf zweyerley Art einrichten: beym Rollenzuge der ersten Art (Fig. 41.) gehen die Seile unterwärts um die Rollen, und sind oberhalb an Punkten A, B u. s. f. befestigt; bey dem der zweyten Art (Fig. 42.) läßt man sie über die Rollen gehen, und befestigt sie mit dem einen Ende gemeinschaftlich an der Last, indem das andere Ende allemal die tiefere Rolle trägt.

§. 179.

Fig. 41. **Aufgabe.** Der Rollenzug der ersten Art enthalte außer der Handrolle C, die bloß dazu dient, das Seil herabzuleiten, n Tragrollen; man fragt, wie viel Kraft nöthig ist, der in G hängenden Last P das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. 1) Da n Rollen vorhanden sind, so giebt es für die Seile n Aufhängepunkte. Die Spannung des Seiles Aa sey $= t'^{(1)}$, die von Ab $= t'^{(2)}$ u. s. f., endlich die des Seiles, das am n Punkte aufgehängt ist, $= t'^{(n)}$.

2) Der Theil o'a' des Seiles Aaa'o' ist mit dem andern Theile Aa gleich stark gespannt (§. 175.), also ist seine Spannung $= t^{(1)}$. Eben so ist die vom fortgesetzten Seile Bb $= t^{(2)}$, und die vom letzten Stücke,

des über die Zugrolle c geht, $= t^{(n)}$. Diese letzte Spannung wird nun durch die Kraft, die wir V nennen wollen, auf der andern Seite in T hervorgebracht, folglich hat man $V = t^{(n)}$.

3) Weil die Punkte A und o' die ganze Last P tragen, so ist $t^{(1)} = \frac{1}{2} P$ (§. 175.), und aus gleichem Grunde $t^{(2)} = \frac{1}{2} t^{(1)}$, $t^{(3)} = \frac{1}{2} t^{(2)}$ u. s. f., also $t^{(4)} = \frac{1}{4} P$, $t^{(5)} = \frac{1}{8} P$, und endlich $t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P$, folglich auch $V = \frac{1}{2^n} . P$.

§. 180.

Um zu sehen, wie viel Kraft auf die Gewichte der Rollen verwandt werden muß, setze man das Gewicht der untersten $= \pi^{(1)}$, der nächstfolgenden $= \pi^{(2)}$ u. s. f. so bekommmt man:

$t^{(1)} = \frac{1}{2} [P + \pi^{(1)}]$, $t^{(2)} = \frac{1}{2} [t^{(1)} + \pi^{(2)}] = \frac{1}{4} P + \frac{1}{4} \pi^{(1)} + \frac{1}{2} \pi^{(2)}$, und so zuletzt $V = t^{(n)} = \frac{1}{2^n} . P + \frac{1}{2^n} \pi^{(1)} + \frac{1}{2^{n-1}} \pi^{(2)} \ldots + \frac{1}{2} \pi^{(n)}$.

Sind die Rollen allemal gleich schwer, so wird, wenn man das Gewicht jeder $= \pi$ setzt:

$$V = \frac{1}{2^n} P + \frac{1}{2} \pi [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}]$$

$$= \frac{1}{2^n} P + (1 - \frac{1}{2^n}) \pi.$$

Die Kraft bekommt also von den Gewichten der Rollen, es mögen ihrer noch so viel seyn, doch nie

... das Gewicht einer einzigen au...

... Es sey $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi =$ ...

... $\frac{1}{2^n}(P - \pi) = \frac{2380}{16}$ ℔ $= 148\frac{3}{4}$ ℔

... addirt, giebt $V = 168\frac{3}{4}$ ℔.

§. 181.

Aufgabe. Das Verhältniß der Kraft zur Lo... ...eym Rollenzuge der zweyten Art zu finden, wenn da... ...Rollen befindlich sind.

... Aufl. 1) Es sey, wie vorhin die Last = ...Kraft = V, die Spannung des Seiles an der u... ...sten Rolle $o = t^{(1)}$, an der zweyten $o' = t^{(2)}$; ... ...obersten, oder nten Rolle $= t^{(n)}$, so ist $V = t^{(}$...

1) Wegen der Spannung des untersten Seil... ...trägt der Punkt o das Gewicht $2t^{(1)}$, und da di... ...Spannung des nächsten Seiles $t^{(2)}$ hervorbring... ...ist $t^{(2)} = 2\,t^{(1)}$.

3) Eben so trägt der Punkt o' das Gewicht $2t^{(}$... $4t^{(1)}$, also ist die Spannung des folgenden Seil... ...$4t^{(1)}$, und so die des obersten $t^{(n)} = 2^{n-1} . t^{(}$... $2^{n-1} . V$.

4) Diese Spannkräfte ziehen nun an dem Heb... ...nach paralleler Richtung, also muß die Last P, d... ...das Gleichgewicht hält, ihnen zusammengenom... ...gleich seyn. Man hat also

$$t^{(1)} + t^{(2)} + \ldots + t^{(n)} = P,$$

...wenn man die für $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ ... gefundenen Werth... ...V u. s. f. substituirt:

$V(1+2+4\ldots+2^{n-1})=P$,

oder $(2^n-1)V=P$, folglich $V=\frac{P}{2^n-1}$.

Anders.

Wegen der Spannung des oberſten Seiles, $t^{(n)}=2^{n-1}.V$, trägt der Aufhängepunkt A ein Gewicht $=2t^{(n)}=2^n.V$. Dies muß ſo viel betragen, als Kraft und Laſt zuſammengenommen; alſo iſt $2^nV=P+V$, folglich $(2^n-1)V=P$, wie vorhin.

§. 182.

Sollen hierbey die Gewichte der Rollen in Betracht gezogen werden, ſo nenne man dieſe von der unterſten an, wie vorhin, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}\ldots\pi^{(n)}$. Alsdann trägt

der Punkt o ein Gewicht $p^{(1)}=2\,t^{(1)}+\pi^{(1)}$

o′ ein Gewicht $p^{(2)}=2\,t^{(2)}+\pi^{(2)}$ u. ſ. f.

und der Anhängepunkt A ein Gewicht $p^{(n)}=2t^{(n)}+\pi^{(n)}$.

Da nun jedes dieſer Gewichte das nächſte Seil ſpannt, ſo iſt $p^{(1)}=t^{(2)}$, $p^{(2)}=t^{(3)}$, alſo

$t^{(2)}=2t^{(1)}+\pi^{(1)}$

$t^{(3)}=4t^{(1)}+\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$. u. ſ. f.,

und endlich $t^{(n)}=2^{n-1}t^{(1)}+2^{n-2}\pi^{(1)}+2^{n-3}\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n-1)}$.

Daher $p^{(n)}=2^nt^{(1)}+2^{n-1}\pi^{(1)}+2^{n-2}\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n)}$. Aber $t^{(1)}=V$, und $p^{(n)}=P+V+\pi^{(1)}+\pi^{(2)}\ldots+\pi^{(n)}$, folglich erhält man

$$(2^n - 1)\,V = P + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$$
$$- 2^{n-1}\left[\pi^{(1)} + \tfrac{1}{2}\pi^{(2)} + \tfrac{1}{4}\pi^{(3)} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\pi^{(n)}\right]$$

Für Rollen von einerley Gewichte π wird:

$$(2^n - 1)\,V = P + n\pi - (2^n - 1)\,\pi, \text{ oder}$$
$$V = \frac{P}{2^n - 1} - \pi + \frac{n\pi}{2^n - 1}.$$

Da $\frac{n}{2^n - 1}$ jederzeit < 1 ist, so sieht man offenbar, daß hier das Gewicht der Rollen der Kraft nicht nachtheilig, sondern vielmehr vortheilhaft ist. Für ein großes n ist diese Erleichterung beynahe $= \pi$, dem Gewichte einer der Rollen.

Exempel. Es sey, wie im §. 181, $n = 4$, $P = 2400$ ℔, $\pi = 20$ ℔, so wird $\frac{P + n\pi}{2^n - 1} = \frac{2480 \text{ ℔}}{15}$ $= 165\frac{1}{3}$ ℔, davon π abgezogen, bleibt $V = 145\frac{1}{3}$ ℔.

Anmerk. Die Rollenzüge beyder Art verstärken also die Würkung der Kraft ungemein; haben aber dabey das Unvollkommene, daß sie viel Raum einnehmen, und nur ein sehr langsames Fortrücken der Last gestatten. Sie sind daher nur in solchen Fällen mit Vortheil anzuwenden, wo sehr große Lasten zu einer geringen Höhe erhoben werden sollen, wie z. B. auf Schiffen: Lasten damit aus dem Raume über Bord zu heben, oder von außen ins Schiff hineinzubringen. Bey zwey oder drey Rollen ist der Rollenzug der ersten Art vorzuziehen, bey mehreren Rollen, der der zweyten Art, weil alsdann das Gewicht der Rollen mehr in Betracht kommt.

$\text{Sin } \frac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{l}$, alſo $\text{Cos } \frac{1}{2}\vartheta = \frac{\sqrt{(l^2 - a^2)}}{l}$, und daher $T = \frac{\frac{1}{2} Pl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$.

5) Ferner $AG = GO = \frac{AE}{\text{Sin } AGE} = \frac{xl}{a}$; $BO = \frac{BD}{\text{Cos } DBO} = \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$; alſo $AG + GO + OB = \frac{2xl}{a} + \frac{bl}{\sqrt{(l^2 - a^2)}} = l$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ba}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$ und $u = x \text{ Cot } \frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{(l^2 - a^2)} - \frac{1}{2}b$.

§. 177.

Die Spannung T wächſt ins Unendliche, wenn ſich a der Grenze l nähert. Man ſieht hieraus, daß eine geringe Laſt das Seil mit erſtaunender Kraft zu ſpannen vermag, wofern es ſchon an ſich durch die Befeſtigung an den Punkten A und B beynahe in eine gerade Linie angezogen iſt.

Daher kann man den hartnäckigſten Widerſtand vermittelſt eines Seiles oder einer Kette zum Weichen bringen, ſo bald man nur zwey feſte Punkte A und B in der Nähe hat; wenn man nemlich die Kette, nachdem man ſie an dem Widerſtande befeſtigt hat, bey A über eine Rolle gehen läßt, und ſie dann, ſtraff angezogen, an den Punkt B heftet, ſo bedarf es nur in den meiſten Fällen nur eines geringen Gewichtes, das man der Kette innerhalb A und B anhängt, um die verlangte Wirkung hervorzubringen.

der untern Flasche einen Druck $= 2V$ vertikal aufwärts, und da ihrer n sind, so wird die ganze untere Flasche von der Kraft $2nV$ aufwärts gezogen.

3) Mit dieser Kraft muß nun die Last P im Gleichgewichte seyn, also hat man $P = 2nV$, oder $V = \frac{P}{2n}$.

Anders.

Wegen der gleichförmigen Spannung des Seiles leidet jede der Axen a, b, c u. s. w. in der obern Flasche einen vertikal herabgehenden Druck $= 2V$, und der Haken bey O, an dem das Ende des Seiles befestigt ist, nach eben der Richtung den einfachen Druck V; also wird die ganze obere Flasche mit der Kraft $2nV + V = (2n + 1)V$ niedergezogen, folglich auch der Punkt A, an dem sie aufgehängt ist.

Was dieser nun zu tragen hat, besteht überhaupt in der Last P und der Kraft V, also hat man $P + V = (2n + 1)V$ oder: $P = 2nV$, wie vorhin.

§. 185.

Fig. 44. Eben so verhält sich die Sache bey einem Flaschenzuge, wo die Rollen in den Flaschen eine gemeinschaftliche Axe haben. Das Seil wird allenthalben mit der Kraft V gespannt, die in F an demselben zieht, und der Last P das Gleichgewicht hält; also leidet der Mittelpunkt einer jeden in der untern Flasche befindlichen Rolle den Druck $2V$ nach vertikal aufwärts gehender Richtung. Daher wird die Axe der untern Flasche in n Punkten von gleichen Kräften heraufgezogen, de-

nen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte die Kraft 2nV äquipollent ist. Diese Kraft wirkt nun unmittelbar der Last entgegen, folglich muß $P = 2nV$ seyn.

§. 186.

Das Gewicht der Flaschen läßt sich hierbey folgendermaßen in Rechnung bringen:

Durch die gleichförmige Spannung des Seiles entsteht, wie wir gesehen haben, im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der untern Rollen eine Kraft $= 2nV$ vertikal aufwärts; durch ihr Gewicht aber in eben dem Punkte eine entgegengesetzte Kraft, die folglich mit der Last P in Verbindung tritt. Es kommt daher bloß das Gewicht der untern Flasche in Betracht; setzt man dies $= \pi$, so wird $2nV = P + \pi$, also $V = \frac{P + \pi}{2n}$.

§. 187.

Der Flaschenzug wird gewöhnlich gebraucht, große Lasten damit nach vertikaler Richtung auf eine gewisse Höhe zu bringen; man kann ihn aber auch da anwenden, wo nach jeder andern Richtung eine Last fortzuziehen, oder ein Widerstand zu überwinden ist. So z. B. bedienen sich die Schiffsbauer desselben, um ein Schiff am schrägen Ufer in die Höhe zu schaffen, und setzen ihn, zur Verstärkung der Kraft, mit einer Winde in Verbindung, wodurch die sogenannte Schiffswinde entsteht, die Herr Büsch in seiner Mechanik umständlich beschrieben hat.

§. 188.

Fig. 45. Ein Beyſpiel, wo der Flaſchenzug ſelbſt nach horizontaler Richtung mit Nutzen angebracht werden kann, iſt folgendes:

Es ſey der Balken DG, der eine geſenkte Lage bekommen hat, wieder in vertikale Stellung zu bringen. Man hänge oben in G durch Hülfe ſtarker eiſerner Ringe, die man daſelbſt um den Balken legt, einen Flaſchenzug ein, und um dieſen an einen andern Punkt A befeſtigen zu können, der nicht ausweicht, ſtütze man einen Balken CE in ſchräger Richtung gegen eine feſte Unterlage C, laſſe über dieſen von A aus eine Kette AEB gehen, und befeſtige dieſelbe, nachdem ſie ſtraff gezogen iſt, irgendwo am Boden im B. Man kann alsdann vermittelſt eines Haſpels das Seil des Flaſchenzuges nach vertikaler Richtung oT anziehen, und ſo durch eine mäßige Kraft eine ſehr gewaltſame Wirkung auf den Punkt G hervorbringen.

Anmerk. Die ſinnreiche Einrichtung, wodurch man den feſten Punkt A erhält, giebt Herr Büſch in ſeiner Mechanik an. Es wird nicht unnütz ſeyn, darüber noch einige Bemerkungen beyzufügen.

1. Da die beyden Theile der Kette AE und EB gleich ſtark geſpannt ſind, ſo muß die Richtung des Balken CE den Winkel AEB halbiren, damit der mittlere Druck, den die Kette auf ihn ausübt, längs EC geſchehe. Iſt alſo die Länge von CE gegeben, ſo beſtimmt dies den Punkt B, wo die Kette befeſtigt werden muß. Es ſey nemlich CE = 1, die vertikale Höhe

$V(1+2+4\ldots+2^{n-1}) = P$,

oder $(2^n - 1)V = P$, folglich $V = \frac{P}{2^n - 1}$.

Anders.

Wegen der Spannung des oberſten Seiles, $t^{(n)} = 2^{n-1} . V$, trägt der Aufhängepunkt A ein Gewicht $= 2t^{(n)} = 2^n . V$. Dies muß ſo viel betragen, als Kraft und Laſt zuſammengenommen; alſo iſt $2^n V = P + V$, folglich $(2^n - 1) V = P$, wie vorhin.

§. 182.

Sollen hierbey die Gewichte der Rollen in Betracht gezogen werden, ſo nenne man dieſe von der unterſten an, wie vorhin, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)} \ldots \pi^{(n)}$. Alsdann trägt

der Punkt o ein Gewicht $p^{(1)} = 2\,t^{(1)} + \pi^{(1)}$

o' ein Gewicht $p^{(2)} = 2\,t^{(2)} + \pi^{(2)}$ u. ſ. f.

und der Anhängepunkt A ein Gewicht $p^{(n)} = 2t^{(n)} + \pi^{(n)}$.

Da nun jedes dieſer Gewichte das nächſte Seil ſpannt, ſo iſt $p^{(1)} = t^{(2)}$, $p^{(2)} = t^{(3)}$, alſo

$t^{(2)} = 2t^{(1)} + \pi^{(1)}$

$t^{(3)} = 4t^{(1)} + \pi^{(1)} + \pi^{(2)}$. u. ſ. f.,

und endlich $t^{(n)} = 2^{n-1} t^{(1)} + 2^{n-2} \pi^{(1)} + 2^{n-3} \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n-1)}$.

Daher $p^{(n)} = 2^n t^{(1)} + 2^{n-1} \pi^{(1)} + 2^{n-2} \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$. Aber $t^{(1)} = V$, und $p^{(n)} = P + V + \pi^{(1)} + \pi^{(2)} \ldots + \pi^{(n)}$, folglich erhält man

[illegible] man [illegible] was für eine Gestalt dass[illegible]
[illegible] Theile, annehm
[illegible] welche Spannung dadurch in jedem sei
[illegible]

[illegible] Es sey AYDB die gesuchte Curve; m
[illegible] Punkte Y derselben ein Perpendikel Y
[illegible]B, und setze AX = x', XY = y', den Bog
[illegible] = s, und den Winkel tYX, den die Tangente
[illegible] der Ordinate XY macht, = φ. Außerdem
[illegible] Länge des Seiles = a, die Distanz AB =
[illegible] das Gewicht des Seiles für die Einheit
[illegible] = $\varkappa$.

2) Alsdann ist das Gewicht des Elementes Y
= $\varkappa$ds, das nach XY wirkt; man zerlege es in ei
[illegible] nach der Tangente Yy und in eine nach
Normale Yn, so ist erstere = $\varkappa$ds Cos φ, letztere
[illegible] Sin φ.

3) Vergleicht man diese Werthe mit den in
[illegible] allgemein angenommenen, so wird p = — $\varkappa$ Cos
q = $\varkappa$ Sin φ, und die Gleichungen daselbst bekomm
[illegible] folgende Gestalt:

$$-\varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi = dT, \quad \varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi = Td\varphi.$$

4) Nimmt man ds als unveränderlich an, so
[illegible] = o; man erhält also, wenn man die zweyte Gl
[illegible] differenziirt:

$\varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi = Td^2\varphi + dTd\varphi$; und da
[illegible] Werthe für T und dT aus 3 substituirt, giebt:

$$\varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi = \frac{\varkappa ds \operatorname{Sin} \varphi d^2\varphi}{d\varphi} - \varkappa ds \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$$

oder $2 \operatorname{Cos} \varphi d\varphi^2 - \operatorname{Sin} \varphi d^2\varphi = 0$.

wovon das Integral $\frac{d\varphi}{\operatorname{Sin} \varphi^2} = Bds$ ist.

5) Hiervon nochmal das Integral genommen, giebt:

$$- \operatorname{Cot} \varphi = A + Bs$$

6) Da alles bey B sich so verhalten muß, wie bey A, so müssen an beyden Punkten die Elemente gegen die Vertikale einerley Lage haben; setzt man also für $s = o$, $\varphi = \eta$, so ist für $s = 2a$, $\varphi = 180° - \eta$; daher $A = - \operatorname{Cot} \eta$, $A + 2Ba = + \operatorname{Cot} \eta$, also $Ba = \operatorname{Cot} \eta$, und folglich: $\operatorname{Cot} \varphi = \operatorname{Cot} \eta \left(1 - \frac{S}{a}\right)$.

7) Im Dreyecke Yyo ist $Yo = Yy \operatorname{Sin} \varphi$, $yo = Yy \operatorname{Cos} \varphi$, also $\frac{dy'}{dx'} = \frac{yo}{Yo} = \operatorname{Cot} \varphi$. Daher hat man auch $\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{Cot} \eta \left(1 - \frac{s}{a}\right)$.

8) Für $s = a$ ist $\frac{dy'}{dx'} = o$, also daselbst y' ein Maximum; ferner $\operatorname{Cot} \varphi = o$, oder $\varphi = 90°$. Die Mitte D des Seiles senkt sich folglich am tiefsten, und das Element bey D hat eine horizontale Lage.

9) Da man die nemliche Gleichung erhalten muß, wenn man B zum Anfangepunkte der Abscissen annimmt, so folgt, daß die Abscisse, welche dem Punkte D entspricht, dieselbe sey, sie mag von A oder B aus genommen werden; also liegt der Punkt C, der zu D

gehört, in der Mitte zwischen A und B, oder die durch D gezogene Vertikale halbirt AB.

10) Man nehme nun DC zur Abscissenlinie an und setze DI = x, IY = y, DC = b, so hat man f — x' = y, b — y' = x, also dx' = — dy, dy = — dx. Versteht man außerdem unter s jetzt die Länge des Bogens DY, so muß man statt des vorhin gebrauchten s, a — s setzen; dadurch wird:

$$\frac{dx}{dy} = \text{Cot}\,\eta\,[1 - (\frac{a-s}{a})] = \frac{s\,\text{Cot}\,\eta}{a} \text{ oder}$$

$$adx = sdy \,.\, \text{Cot}\,\eta.$$

11) Also $a^2dx^2 = s^2dy^2 \,.\, \text{Cot}\,\eta^2$,

$(a^2 + s^2\,\text{Cot}\,\eta^2)\,dx^2 = s^2\,(dx^2 + dy^2)\,\text{Cot}\,\eta^2 = s^2ds^2 \,.\, \text{Cot}\,\eta^2$, folglich

$$dx = \frac{sds \,.\, \text{Cot}\,\eta}{\sqrt{(a^2 + s^2\,\text{Cot}\,\eta^2)}} = \frac{sds}{\sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta^2 + s^2)}}$$

welches integrirt: $x = C + \sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta^2 + s^2)}$ giebt

12) Für s = o ist auch x = o, also C = — a tang η; daher wird

$x = \sqrt{(a^2\,\text{tang}\,\eta + s^2)} - a\,\text{tang}\,\eta$, und daraus gegenseitig $s = \sqrt{(x^2 + 2ax\,\text{tang}\,\eta)}$.

13) Um T zu bestimmen, setze man in der Gleichung $\varkappa ds\,\text{Sin}\,\varphi = Td\varphi$ (3) statt ds seinen Werth $\frac{d\varphi}{B\,\text{Sin}\,\varphi^2}$ (4) $= \frac{a\,\text{tang}\,\eta d\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2}$ (6) so erhält man T: $\frac{\varkappa a\,\text{tang}\,\eta}{\text{Sin}\,\varphi}$. Die Spannung ist also nach der Lage des Elements verschieden, und verhält sich verkehrt wie der Sinus des Neigungswinkels gegen die Vertikale.

Anmerk. Der Name Kettenlinie, den man dieſer Curve allgemein beylegt, rührt unſtreitig daher, daß man anfangs, der deutlichern Vorſtellung wegen, die einzelnen Glieder einer Kette betrachtete, und hiervon zu der ſtetigen Krümmung eines biegſamen Fadens überging. Vor Galilaus findet man keine Spur einer Bekanntſchaft mit dieſer Linie; er ſelbſt verwechſelt ſie noch mit der Parabel. *a*) Erſt 1690 wurde die Frage über ihre Geſtalt von Jacob Bernoulli *b*) von neuem aufgeworfen, und durch Huygbens Leibniz und Joh. Bernoulli *c*) beantwortet. Durch Eulers allgemeinere Theorie der Spannung *d*) iſt zur Auflöſung dieſes Problems ein ſehr natürlicher und leichter Weg eröfnet, der andere Hülfsmittel, z. B. die Vorausſetzung, daß jedes Element des Fadens ſo tief als möglich herabſinkt, *e*) unnöthig macht.

§. 190.

1. Setzt man $a \text{ tang } \eta = g$, ſo wird $s^2 = x^2 + 2gx$; alſo für $s = a$, $a^2 = b^2 + 2gb$ und $a^2 + g^2 = (b+g)^2$.

2. Ferner hat man $gdx = sdy$ (10), und darin für dx ſeinen Werth $\frac{sds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$ (11) geſetzt, giebt $dy = \frac{gds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, wovon das Integral $y = g \log. \text{nat.} [\frac{a+\sqrt{(g^2+s^2)}}{g}]$ iſt.

3. Für $s = a$ erhält man aus dieſem: $f = g \log$

a) Mechanica, Dialog. II. pag. 131.

b) Acta eruditorum 1690 pag. 213.

c) Ebendaſelbſt 1691 pag. 275.

d) Novi Comment. Petropol. Tom. XV. und Tom. XX.

e) Frisi Opera Math. Vol. I. Lib. I. pag. 125.

gehört, in der Mitte zwischen A und B, oder die durch D gezogene Vertikale halbirt AB.

10) Man nehme nun DC zur Abscissenlinie an, und setze DI = x, IY = y, DC = b, so hat man $f - x' = y$, $b - y' = x$, also $dx' = -dy$, $dy' = -dx$. Versteht man außerdem unter s jetzt die Länge des Bogens DY, so muß man statt des vorhin gebrauchten s, a — s setzen; dadurch wird:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{Cot}\eta\,[1 - (\frac{a-s}{a})] = \frac{s\operatorname{Cot}\eta}{a} \text{ oder}$$

$$adx = sdy \,.\, \operatorname{Cot}\eta.$$

11) Also $a^2dx^2 = s^2dy^2 \,.\, \operatorname{Cot}\eta^2$,

$(a^2 + s^2 \operatorname{Cot}\eta^2)\, dx^2 = s^2 (dx^2 + dy^2) \operatorname{Cot}\eta^2 = s^2ds^2 \,.\, \operatorname{Cot}\eta^2$, folglich

$$dx = \frac{sds \,.\, \operatorname{Cot}\eta}{\sqrt{(a^2 + s^2 \operatorname{Cot}\eta^2)}} = \frac{sds}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tang}\eta^2 + s^2)}}$$

welches integrirt: $x = C + \sqrt{(a^2 \operatorname{tang}\eta^2 + s^2)}$ giebt.

12) Für s = o ist auch x = o, also C = — a tang η; daher wird

$x = \sqrt{(a^2 \operatorname{tang}\eta + s^2)} - a \operatorname{tang}\eta$, und daraus gegenseitig $s = \sqrt{(x^2 + 2ax \operatorname{tang}\eta)}$.

13) Um T zu bestimmen, setze man in der Gleichung $\varkappa ds \operatorname{Sin}\varphi = Td\varphi$ (3) statt ds seinen Werth $\frac{d\varphi}{B \operatorname{Sin}\varphi^2}$ (4) $= \frac{a \operatorname{tang}\eta d\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^2}$ (6) so erhält man $T = \frac{\varkappa a \operatorname{tang}\eta}{\operatorname{Sin}\varphi}$. Die Spannung ist also nach der Lage des Elements verschieden, und verhält sich verkehrt wie der Sinus des Neigungswinkels gegen die Vertikale.

Anmerk. Der Name Kettenlinie, den man dieſer Curve allgemein beylegt, rührt unſtreitig daher, daß man anfangs, der deutlichern Vorſtellung wegen, die einzelnen Glieder einer Kette betrachtete, und hiervon zu der ſtetigen Krümmung eines biegſamen Fadens überging. Vor Galilaus findet man keine Spur einer Bekanntſchaft mit dieſer Linie; er ſelbſt verwechſelt ſie noch mit der Parabel. *a*) Erſt 1690 wurde die Frage über ihre Geſtalt von Jacob Bernoulli *b*) von neuem aufgeworfen, und durch Huygbens Leibnitz und Joh. Bernoulli *c*) beantwortet. Durch Eulers allgemeinere Theorie der Spannung *d*) iſt zur Auflöſung dieſes Problems ein ſehr natürlicher und leichter Weg eröfnet, der andere Hülfsmittel, z. B. die Vorausſetzung, daß jedes Element des Fadens ſo tief als möglich herabſinkt, *e*) unnöthig macht.

§. 190.

1. Setzt man $a \tang \eta = g$, ſo wird $s^2 = x^2 + 2gx$; alſo für $s = a$, $a^2 = b^2 + 2gb$ und $a^2 + s^2 = (b+g)^2$.

2. Ferner hat man $gdx = sdy$ (10), und darin für dx ſeinen Werth $\frac{sds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$ (11) geſetzt, giebt $dy = \frac{gds}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, wovon das Integral $y = g$ log. nat. $[\frac{a+\sqrt{(g^2+s^2)}}{g}]$ iſt.

3. Für $s = a$ erhält man aus dieſem: $f = g$ log

a) Mechanica, Dialog. II. pag. 131.

b) Acta eruditorum 1690 pag. 213.

c) Ebendaſelbſt 1691 pag 273.

d) Novi Comment. Petropol. Tom. XV. und Tom. XX.

e) Frisi Opera Math. Vol. I. Lib. I. pag. 185.

$$\frac{[\ldots]}{g} = g \log \frac{[a + b - g]}{g}, \text{ un}$$

wenn man darin für g seinen Werth $\frac{a^2 - b^2}{2b}$ (1) setz

$$f = \frac{a^2 - b^2}{2b} \cdot \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

4. Also $\frac{bf}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{b}{a} + \frac{b^3}{3a}$

$+ \frac{b^5}{5a^5} +$ u. s. w.

$$f = a - \frac{2}{1 \cdot 3} \frac{b^2}{a} - \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{b^4}{a^3} - \frac{2}{5 \cdot 7} \frac{b^6}{a^5} \text{ und}$$

$$\frac{a - f}{2a} = \frac{1}{1 \cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{b}{a}\right)^6 +$$

u. s. w.

5. Um gegenseitig b durch a und f auszudrücken muß diese Reihe umgekehrt werden, welches so ge schieht:

Man bezeichne $\frac{a - f}{2a}$ durch d, und setze:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha d + \beta d^2 + \gamma d^3 + \delta d^4 + \text{u. s. w., so wir}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 = \alpha^2 d^2 + 2\alpha\beta d^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2) d^4 + \ldots$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6 = \alpha^3 d^3 + 3\alpha^2\beta d^4 + \ldots$$

Diese Werthe für $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $\left(\frac{b}{a}\right)^4$ u. s. f. in erster Reihe (4) substituirt, geben:

$$0=(\tfrac{1}{3}\alpha-1)d+\tfrac{1}{3}\beta\,\Big\}d^2+\tfrac{1}{3}\gamma\,\Big\}d^3+\tfrac{1}{3}\delta\,\Big\}d^4+\text{u. s. f.}$$
$$+\tfrac{1}{15}\alpha^2\Big\}\quad+\tfrac{2}{25}\alpha\beta\Big\}\quad+\tfrac{2}{15}\alpha\gamma\quad\Big\}$$
$$+\tfrac{1}{35}\alpha^3\Big\}\quad+\tfrac{1}{15}\beta^2\quad\Big\}$$
$$+\tfrac{3}{35}\alpha^2\beta$$
$$+\tfrac{1}{63}\alpha^4$$

also hat man $\frac{1}{3}\alpha - 1 = 0$, $\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{15}\alpha^2 = 0$, $\frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{15}\alpha\beta + \frac{1}{35}\alpha^3 = 0$ u. s. w., folglich $\alpha = 3$, $\beta = -\frac{9}{5}$, $\gamma = -\frac{27}{175}$, $\delta = -\frac{27}{175}$; daher wird:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3d - \frac{9}{5}d^2 - \frac{27}{175}d^3 - \frac{27}{175}d^4 - \text{u. s. w.}$$

Exempel. Es sey die Länge des Seiles doppelt so groß, als die Entfernung der Punkte A und B, also $f = \frac{1}{2}a$, so hat man $d = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,6345$, $b = 0,7965\,a = 1,593\,f$, für die Tiefe, zu der die Mitte D unter die Horizontale AB sinkt; ferner $g = \frac{a^2-b^2}{2b} = 0,2294\,a$, $\tang\eta = 0,2294$, $\eta = 12^\circ 55'$.

6. Wenn man die Gleichung $gdx = sdy$ (2) differenziirt, und dabey dx als beständig annimmt, so erhält man:

$$0 = sd^2y + dyds, \text{ oder } d^2y = -\frac{dyds}{s}.$$

Man nenne r den Krümmungshalbmesser, so ist bekanntlich $r = -\frac{ds^3}{d^2y \cdot dx}$; darin der Werth für d^2y gesetzt, giebt $r = \frac{s^2ds^2}{sdydx} = \frac{s^3ds^2}{gdx^2} = \frac{g^2+s^2}{g}$ (2)

§. 191.

1. Wir hatten vorhin $T = \frac{\varkappa a \operatorname{tang} \eta}{\operatorname{Sin} \varphi}$ (§. 198. 13.) $= \frac{\sigma \varkappa}{\operatorname{Sin} \varphi}$; ſetzt man darin für Sin φ ſeinen Werth (ebendaſ. 7.) $\frac{Yo}{Yy} = \frac{dy}{ds} = \frac{g}{\sqrt{(g^2+s^2)}}$, ſo erhält man $T = \varkappa \sqrt{(g^2+s^2)} = \varkappa \sqrt{gr}$. Die Spannung verhält ſich alſo wie die Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmeſſer.

2. Im Punkte D, oder für $s = o$ iſt ſie $= \varkappa g$, alſo daſelbſt am kleinſten. Ihren größten Werth erreicht ſie für $s = a$, oder in den Punkten A und B.

3. Für dieſe Punkte bekommt man auch, wenn man $\varphi = \eta$ ſetzt: $T = \frac{\varkappa a}{\operatorname{Cos} \eta}$; zerlegt man dieſe Kraft in eine vertikale und in eine horizontale, ſo wird erſtere $= T \operatorname{Cos} \eta = \varkappa a$, letztere $= T \operatorname{Sin} \eta = \varkappa a \operatorname{tang} \eta = \varkappa g$. Die Punkte A und B tragen alſo jeder das halbe Gewicht des Fadens, und leiden außerdem einen horizontalen Druck, der der Spannung des unteren horizontalen Elementes in D gleich iſt (2).

4. Es iſt klar, daß das Gleichgewicht des Fadens nicht aufgehoben wird, wenn man ihn in einem ſeiner Punkte y befeſtigt: denn alsdann ſetzt dieſer Punkt dem tieferen Theile yD weder einen größern noch geringeren Widerſtand entgegen, als vorhin, da er durch die Spannung des Elements Yz zurückgehalten wurde. Wenn daher die feſten Punkte A und B nicht in einer

$$o = (\tfrac{1}{3}\alpha - 1)d + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{15}\alpha^2 \Big\} d^2 + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{2}{15}\alpha\beta + \tfrac{1}{35}\alpha^3 \Big\} d^3 + \tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{2}{15}\alpha\gamma + \tfrac{1}{15}\beta^2 + \tfrac{3}{35}\alpha^2\beta + \tfrac{1}{63}\alpha^4 \Big\} d^4 + \text{u. s. f.}$$

also hat man $\frac{1}{3}\alpha - 1 = o$, $\frac{1}{3}\beta + \frac{1}{15}\alpha^2 = o$, $\frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\alpha\beta + \frac{1}{35}\alpha^3 = o$ u. s. w., folglich $\alpha = 3$, $\beta = -\frac{9}{5}$, $\gamma = -\frac{27}{175}$, $\delta = -\frac{27}{175}$; daher wird:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 3d - \frac{9}{5}d^2 - \frac{27}{175}d^3 - \frac{27}{175}d^4 - \text{u. s. w.}$$

Exempel. Es sey die Länge des Seiles doppelt so groß, als die Entfernung der Punkte A und B, also $f = \frac{1}{2}a$, so hat man $d = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = o,\ 6345$, $b = o,7965\ a = 1,593\ f$, für die Tiefe, zu der die Mitte D unter die Horizontale AB sinkt; ferner $g = \frac{a^2 - b^2}{2b} = o,\ 2294\ a$, tang $\eta = o,\ 2294$, $\eta = 12°55'$.

6. Wenn man die Gleichung $gdx = sdy$ (2) differenziirt, und dabey dx als beständig annimmt, so erhält man:

$$o = sd^2y + dyds, \text{ oder } d^2y = -\frac{dyds}{s}.$$

Man nenne r den Krümmungshalbmesser, so ist bekanntlich $r = -\frac{ds^3}{d^2y \cdot dx}$; darin der Werth für d^2y gesetzt, giebt $r = \frac{s^2ds^2}{sdydx} = \frac{s^2ds^2}{gdx^2} = \frac{g^2 + s^2}{g}$ (2)

[illegible] der Rollen eine unveränderliche
[illegible] also wirken die Kräfte P und
[illegible] Winkelhebel, und weil ihre Richtungen
[illegible] senkrecht sind, so hat man:

P : M = BO : AO.

Die beyden Kräfte müssen sich also verkehrt wie
[illegible] Halbmesser der Rollen.

§. 193.

Dieselbe Bedingung des Gleichgewichtes
[illegible] noch statt, wenn die beyden Rollen nicht in
[illegible] liegen, sondern bloß eine gemeinschaftliche
[illegible], auf der sie senkrecht befestigt sind; alsdann
[illegible] AO und BO zwey auf dieser Axe senkrechte
[illegible], an denen die Kräfte P und M eben so wi
[illegible] am Winkelhebel (§. 67.).

Es kann also auch der kleinere Kreis der
[illegible] einer cylindrischen Welle seyn, die sich ver
[illegible] zweyer Zapfen in Lagern dreht, und statt daß
[illegible] Kraft an der größern Scheibe durch ein Seil zi
[illegible], kann sie unmittelbar an dem Umfange derse
[illegible] der Tangente oder senkrecht auf den Halbm
[illegible] gebracht werden. Diese Einrichtung giebt eine
[illegible], die man das **Rad an der Welle** nennt.

§. 194.

Es sey der Halbmesser des Rades = R, der
[illegible], an dem Seile, das über die Welle geht, h
[illegible] Last P, und dieser halte eine Kraft M das Gl

gewicht, die am Umfange des Rades nach der Tangente wirkt, so hat man (§. 193.).

$$M : P = r : R, \text{ also } M = \frac{Pr}{R}.$$

Es kann nun R nach Gefallen viel größer als r genommen werden, also läßt sich vermittelst des Rades eine gegebene Last mit weit geringerer Kraft im Gleichgewichte halten, und wenn man die Kraft etwas verstärkt, in die Höhe heben.

§. 195.

Je nachdem der Gebrauch ist, den man von dieser Maschine macht, bekommt sie noch besondere Einrichtungen, und nach diesen verschiedene Namen. Bey horizontal liegender Welle nennt man sie den **Haspel**, bey vertikal gestellter Welle die **Winde** oder den **Göpel**.

Vom Haspel giebt es folgende Arten:

1) **Den Hornhaspel.** Er enthält an der Welle statt des Rades eine Kurbel oder gebogenen Hebelarm, an dessen Ende ein Griff eingezapft ist, der mit der Welle parallel läuft.

2) **Den Kreuzhaspel:** bey diesem sind unter rechten Winkeln zwey Hebelarme durch die Welle gesteckt, so daß die zur Umdrehung der Welle nöthige Kraft unter vier Arbeiter vertheilt werden kann.

3) **Den Radhaspel:** hier liegen die Punkte, woran die Kraft angebracht wird, in dem Umfange eines wirklichen Rades.

der Verbindung der Rollen eine unveränderliche Winkeldiſtanz AOB; alſo wirken die Kräfte P und M an einem Winkelhebel, und weil ihre Richtungen auf die Schenkel deſſelben ſenkrecht ſind, ſo hat man:

$$P : M = BO : AO.$$

Die beyden Kräfte müſſen ſich alſo verkehrt verhalten, wie die Halbmeſſer der Rollen.

§. 193.

Dieſelbe Bedingung des Gleichgewichtes findet auch noch ſtatt, wenn die beyden Rollen nicht in einer Ebene liegen, ſondern bloß eine gemeinſchaftliche Axe haben, auf der ſie ſenkrecht befeſtigt ſind; alsdann ſind nemlich AO und BO zwey auf dieſer Axe ſenkrechte Hebelarme, an denen die Kräfte P und M eben ſo wirken, wie am Winkelhebel (§. 67.).

Es kann alſo auch der kleinere Kreis der Querſchnitt einer cylindriſchen Welle ſeyn, die ſich vermittelſt zweyer Zapfen in Lagern dreht, und ſtatt daß man die Kraft an der größern Scheibe durch ein Seil ziehen läßt, kann ſie unmittelbar an dem Umfange derſelben nach der Tangente oder ſenkrecht auf den Halbmeſſer angebracht werden. Dieſe Einrichtung giebt eine Maſchine, die man das **Rad an der Welle** nennt.

§. 194.

Es ſey der Halbmeſſer des Rades $= R$, der Welle $= r$; an dem Seile, das über die Welle geht, hänge eine Laſt P, und dieſer halte eine Kraft M das Gleich-

Wenn bey einem größern Rade dieſer Art ſtatt der Spillen Bretter zwiſchen die Kränze gelegt ſind, ſo können Menſchen oder auch Thiere mit den Füßen durch ihr Gewiche darauf wirken; ein ſolches Rad nennt man ein **Lauf-** oder **Tretrad.**

§. 197.

Fig. 48. **Aufg.** Ein Rad vom gegebenen Halbmeſſer $= r$ iſt um den feſten Mittelpunkt C beweglich; in einem Punkte m ſeines innern Umfanges, der von B, dem tiefſten Punkte des Rades, um den Bogen $Bm = \eta$ abſteht, liegt eine Laſt P; man ſucht das Moment, welches ſie hat, das Rad zu drehen.

Aufl. 1) Der Punkt m kann dem Drucke nicht anders, als nach der Tangente mt ausweichen; man zerlege alſo das Gewicht P, das nach der Vertikale mv zu ſinken ſtrebt, in eine Kraft nach mt, und in eine nach der darauf ſenkrechten Richtung mr.

2) Da mt auf dem Halbmeſſer Cm ſenkrecht iſt, ſo fällt mr in die Verlängerung deſſelben; folglich iſt $vmr = BCm = \eta$, alſo die Kraft nach $mt = P \sin \eta$, und die nach $mr = P \cos \eta$.

3) Erſtere ziehe am Hebelarme $Cm = r$ ſenkrecht, und hat alſo das Moment $rP \sin \eta$, dieſen zu drehen; letztere drückt das Rad nach der Richtung Cm an ſeine feſte Axe, und wird dadurch aufgehoben.

Anders.

Man ziehe die Horizontale CD, und fälle darauf aus m das Perpendikel mp, ſo iſt dies die verlängerte

Richtung des Gewichtes P, und man kann also dasse
auf den Punkt p verlegen. Daher ist sein Momi
das Rad zu drehen, = P . Cp = P . Cm . Sin Cr
= Pr Sin η.

Das Tretrad.

§. 198.

Beym Tretrade drückt der Arbeiter ein Trittbr
nach dem andern mit dem Fuße nieder, indem er se
ganzes Gewicht darauf ruhen läßt; dabey sinkt d
Brett jedesmal bis zu einer gewissen Tiefe herab, e
er ein anderes betritt, so daß sein Moment währei
der Zeit eines Fußtri[illegible] nicht ganz gleich ist. We
aber n die Stelle ist, wo er den Fuß zuerst auf d
Brett setzt, m die, wo er dasselbe verläßt, so kann m
ohne merklichen Fehler die Mitte o zwischen beyd
Punkten für seinen mittlern Standpunkt annehmen, u
darnach sein mittlers Moment in Anschlag bringen.

§. 199.

Es sey das Gewicht des Menschen = P, d
Halbmesser des Rades = r, so wird sein mittleres M
ment = Pr Sin BCo (§. 197.), das also desto grös
ist, je weiter der Punkt o von B entfernt liegt. D
aber die Weite des Schrittes mn als unveränderli
angesehen werden kann, so wächst mit dem Bogen B
zugleich auch die vertikale Höhe nf, zu der der Mens
sein Gewicht bey jedem Fußtritte heben muß, und de
Vortheil, der aus der Zunahme des Momentes en

ſpringt, wenn man den Punkt o weiter nach D rücken läßt, wird dadurch wieder aufgehoben, daß alsdann der Schritt mn eine deſto ſteilere Lage bekommt, und daß ſich folglich die Kraft des Menſchen in deſto kürzerer Zeit erſchöpfen muß. Es kann alſo die größte Wirkung nur erreicht werden, wenn man den Punkt o in einer ſolchen Entfernung von B annimmt, daß eine Anhöhe unter dem Neigungswinkel nmf ſich doch noch mit Bequemlichkeit erſteigen läßt. Man ſetze dieſen Winkel = I, und ziehe an m die Tangente mu, ſo hat man:

$$Cmw + Cmu + umf = 180°.$$

Nun iſt $Cmw = 90° - mCB$, und $Cmu = 90°$. Dies beydes ſubſtituirt, giebt

$$umf - mCB = 0, \text{ oder}$$
$$mCB = umf; \text{ dazu}$$
$$mCo = umn \text{ addirt, wird}$$
$$oCB = umf = I.$$

Der Erfahrung zu Folge iſt $I = 30°$, und das Gewicht des Menſchen P, im Durchſchnitte, = 140 ℔, alſo ſein Moment $= \frac{1}{2} Pr = r + 70$ ℔.

§. 200.

Es verhält ſich Alles noch wie vorhin, wenn das Rad in dem obern Quadranten Am'D von außen getreten wird. Ruhet nemlich das Gewicht P auf einem Tritte des Rades in m', und iſt $Am' = Bm$, ſo iſt deſſen Umdrehungsmoment ebenfalls $= P . Cp = Pr \sin \eta$, wie im §. 197.

Ferner haben die Tangenten an m und m' gegen

Richtung des Gewichtes P, und man kann also dasselbe auf den Punkt p verlegen. Daher ist sein Moment, das Rad zu drehen, = P . Cp = P . Cm . Sin Cmp = Pr Sin η.

Das Tretrad.

§. 198.

Beym Tretrade drückt der Arbeiter ein Trittbret nach dem andern mit dem Fuße nieder, indem er sein ganzes Gewicht darauf ruhen läßt; dabey sinkt das Brett jedesmal bis zu einer gewissen Tiefe herab, ehe er ein anderes betritt, so daß sein Moment während der Zeit eines Fußtrittes nicht ganz gleich ist. Wenn aber n die Stelle ist, wo er den Fuß zuerst auf das Brett setzt, m die, wo er dasselbe verläßt, so kann man ohne merklichen Fehler die Mitte o zwischen beyden Punkten für seinen mittlern Standpunkt annehmen, und darnach sein mittlers Moment in Anschlag bringen.

§. 199.

Es sey das Gewicht des Menschen = P, der Halbmesser des Rades = r, so wird sein mittleres Moment = Pr Sin BCo (§. 197.), das also desto größer ist, je weiter der Punkt o von B entfernt liegt. Da aber die Weite des Schrittes mn als unveränderlich angesehen werden kann, so wächst mit dem Bogen Bo zugleich auch die vertikale Höhe nf, zu der der Mensch sein Gewicht bey jedem Fußtritte heben muß, und der Vortheil, der aus der Zunahme des Momentes entspringt.

Es ist ein allgemein bekannter Erfahrungssatz, daß Thiere weit weniger zum Steigen geschickt sind, als Menschen, und daß sie, ohne Lasten zu tragen oder zu ziehen, doch schon merklich angegriffen werden, wenn die Schräge des Bodens über 20° beträgt. Man setzt daher für sie gewöhnlich den Winkel I (§. 199.) = 18°, wodurch ihr Moment = Pr Sin 18° = 0,30902 . Pr wird.

Die Tretscheibe.

§. 202.

Fig. 49. Eine Scheibe, die man an einer schrägen Axe CD senkrecht befestigt, bekommt dadurch gegen den Horizont eine geneigte Lage. Legt man also ein Gewicht darauf, so hat dies ein Bestreben, längs derselben herabzusinken (§. 118.), oder sie um ihre Axe zu drehen, wofern das Herabgleiten auf irgend eine Art, z. B. durch Friction, verhindert wird. Man kann sie daher auch durch Menschen oder Thiere, die man darauf treten läßt, in Umlauf bringen, worin das Wesentliche der sogenannten Tretscheibe besteht.

§. 203.

Es sey DCd die Abweichung der Axe CD von der Vertikale Cd, so ist die Ebene DCd zugleich die Neigungsebene der Scheibe, und, wenn sie dieselbe in ab schneidet, BCb ihr Neigungswinkel gegen die Horizon-

Boden senkrecht setzte; es stellt sie aber, wie mich dünkt, auf denselben vertikal.

$= 90^\circ$ ist, DCd = B

Standpunkt des M

Gewicht. Man zerlege

senkrecht auf die Sche

nach Mm, mit ab para

, und wird deshalb aufge

noch in eine längs dem H

nach Mn, senkrecht auf d

den Winkel MCa = ϑ, so ist

wovon die Axe in C gedrückt wi

ϑ, welche ganz auf die Uml

verwandt wird, und das Mom

gut.

den senkrechten Abstand des Pu

wird f = CM Sin ϑ, folglich

= Pf Sin I; das also, wie m

Tretrad gefundenen Momente üb

...mengesetzte Winden.

§. 204.

Haspel oder der Winde andere e

als Rollen, Flaschenzüge, Rä

gebracht werden, so entstel

brauchbare Hebzeuge, die m

...mengesetzte Winden, oder a

vorgelegtem Zeuge (caprae; h

hèvres) nennt.

Hieher gehören auch die ſogenannten **Krahne**, bey denen entweder das ganze Geſtell, oder bloß der Arm, an den die Laſt angehängt iſt, um eine Axe gedrehet werden kann. Dieſe Einrichtung dient dazu, die Laſt nicht allein vertikal in die Höhe zu heben, ſondern auch ſeitwärts an jeden beliebigen Ort, z. B. aus dem Schiffe ans Ufer zu bringen. Man findet Abbildungen davon im Leupold Theat. Mach., Muſchenbroek Introd. ad phil. nat. Tom I.; und in den Machines approuvees par l'acad. Tom II. Vorzüglich einfach iſt der Krahn, den **Scheldom** im 35. Bande der Schwed. Abh. S. 144. beſchreibt.

§. 205.

Eine muſterhafte Zuſammenſetzung des Haſpels mit einfachen Rollen führt **van Swinden** in ſeinen Poſit. phyſic. part. I. pag. 275. an, deren Einrichtung folgende iſt:

Fig. 50. 1) Die Welle des Haſpels beſteht aus zweyen ungleich dicken cylindriſchen Theilen A, a, um die ſich ein gemeinſchaftliches Seil nach entgegengeſetzten Seiten herumſchlingt, das oben über eine Rolle p geht.

2) Dieſe Rolle hängt an einem andern Seile, das ſich über eine höher liegende Rolle q ſchlägt, die bey C eingehängt iſt, und dazu dient, das Seil zur aufzuwindenden Laſt herabzuführen.

3) Durch den dickeren Theil A der Welle ſind Hebelarme durchgeſteckt, vermittelſt deren die Welle gedreht werden kann.

4) Indem man die Welle dreht, wickelt sich das Seil an dieser Seite weiter auf, und zugleich vom andern Theile der Welle a ab. Da sich aber jedesmal ein größeres Stück auf als abwickelt, so wird die Rolle p herabgezogen, also auch das Ende des Seiles, woran sie hängt; folglich wird das andere Ende, und mit ihm die Last, heraufgezogen.

§. 206.

Aufgabe. Die Kraft V am Hebelarme der Welle zu bestimmen, die der aufzuwindenden Last P das Gleichgewicht hält.

Aufl. 1) Durch die Last leidet das obere Seil die Spannung P, und die Rolle p wird also mit der Kraft P aufwärts gezogen.

2) Sind daher die beyden Enden des Seiles, das über diese Rolle geht, parallel, so wird jedes von der Kraft $\frac{1}{2}$ P gespannt (§. 174.).

3) Es sey der Halbmesser des Cylinders $A = R$, des Cylinders $a = r$, so hat das Seilstück, welches um den erstern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ PR, ihn um die Axe nach der Richtung mn zu drehen, und das andere, welches um den letztern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ Pr, ihn nach entgegengesetzter Richtung zu drehen; folglich behält die Last das Umdrehungsmoment $\frac{1}{2}$ P (R — r) nach ersterer Richtung mn.

4) Diesem muß das Moment der Kraft gleich und entgegengesetzt seyn. Setzt man also die Länge des

Hieher gehören auch die sogenannten **Krahne**, bey denen entweder das ganze Gestell, oder bloß der Arm, an den die Last angehängt ist, um eine Axe gedrehet werden kann. Diese Einrichtung dient dazu, die Last nicht allein vertikal in die Höhe zu heben, sondern auch seitwärts an jeden beliebigen Ort, z. B. aus dem Schiffe ans Ufer zu bringen. Man findet Abbildungen davon im Leupold Theat. Mach., Muschenbroek Introd. ad phil. nat. Tom I.; und in den Machines approuvees par l'acad. Tom II. Vorzüglich einfach ist der Krahn, den **Scheldom** im 35. Bande der Schwed. Abh. S. 144. beschreibt.

§. 205.

Eine musterhafte Zusammensetzung des Haspels mit einfachen Rollen führt **van Swinden** in seinen Posit. physic. part. I. pag. 275. an, deren Einrichtung folgende ist:

Fig. 50. 1) Die Welle des Haspels besteht aus zweyen ungleich dicken cylindrischen Theilen A, a, um die sich ein gemeinschaftliches Seil nach entgegengesetzten Seiten herumschlingt, das oben über eine Rolle p geht.

2) Diese Rolle hängt an einem andern Seile, das sich über eine höher liegende Rolle q schlägt, die bey C eingehängt ist, und dazu dient, das Seil zur aufzuwinden Last herabzuführen.

3) Durch den dickeren Theil A der Welle sind Hebelarme durchgesteckt, vermittelst deren die Welle gedreht werden kann.

4) Indem man die Welle dreht, wickelt sich das Seil an dieser Seite weiter auf, und zugleich vom andern Theile der Welle a ab. Da sich aber jedesmal ein größeres Stück auf als abwickelt, so wird die Rolle p herabgezogen, also auch das Ende des Seiles, woran sie hängt; folglich wird das andere Ende, und mit ihm die Last, heraufgezogen.

§. 206.

Aufgabe. Die Kraft V am Hebelarme der Welle zu bestimmen, die der aufzuwindenden Last P das Gleichgewicht hält.

Aufl. 1) Durch die Last leidet das obere Seil die Spannung P, und die Rolle p wird also mit der Kraft P aufwärts gezogen.

2) Sind daher die beyden Enden des Seiles, das über diese Rolle geht, parallel, so wird jedes von der Kraft $\frac{1}{2}$ P gespannt (§. 174.).

3) Es sey der Halbmesser des Cylinders A = R, des Cylinders a = r, so hat das Seilstück, welches um den erstern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ PR, ihn um die Axe nach der Richtung mn zu drehen, und das andere, welches um den letztern gewunden ist, das Moment $\frac{1}{2}$ Pr, ihn nach entgegengesetzter Richtung zu drehen; folglich behält die Last das Umdrehungsmoment $\frac{1}{2}$ P (R — r) nach erstlerer Richtung mn.

4) Diesem muß das Moment der Kraft gleich und entgegengesetzt seyn. Setzt man also die Länge des

Hebelarms AF, auf deſſen Endpunkt F ſie angebracht iſt, $= f$, ſo hat man

$$Vf = \tfrac{1}{2} P (R - r).$$

Exempel. Es ſey $P = 3000$ ℔, $R = 6$ Zoll, $r = 5\frac{3}{4}$ Zoll, $f = 15$ Zoll, ſo wird $V = \frac{1}{120} P = 25$ ℔.

§. 207.

Fig. 51. Wenn die beyden Seilſtücke AG, ag nicht parallel ſind, ſondern unter irgend einem Winkel ϑ gegen einander zuſammenlaufen, ſo iſt die Spannung eines jeden $= \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \vartheta}$ (§. 174.), alſo allemal gröſſer, als wenn ſie parallel laufen.

Damit dieſes Erforderniß ſtatt finde, muß der Durchmeſſer der Rolle $Gg = Aa = AO + Oa$, folglich ihr Halbmeſſer $Gp = \frac{R + r}{2}$, oder das arithmetiſche Mittel zwiſchen den Halbmeſſern der beyden Cylinder ſeyn.

Gezähntes Rad.

§. 208.

Wenn die Hörner oder Spillen (§. 196.) dazu dienen ſollen, die Bewegung des Rades einem andern daranliegenden Rade mitzutheilen, ſo bekommen ſie eine etwas veränderte Geſtalt, und heißen alsdann **Zähne**. Der Zahn des einen Rades greift zwiſchen zwey Zähne des andern, gleitet an dem einen herab,

§. 211.

Man nennt dies kleinere Rad ein **Getriebe.** es wegen seines geringen Umfanges schmalere und f lich schwächere Zähne hat als andere Räder, so g man ihm der Länge der Axe nach eine größere Br so daß es wie ein Stück einer dünnen Welle gest ist, in das Vertiefungen nach dem Mittelpunkte zu geschnitten sind.

Das Getriebe hölzerner Räderwerke (der S ling) besteht aus zweyen parallelen Scheiben, di ihrem Umfange mit cylindrischen Stäben (Triebstöc verbunden sind.

§. 212.

Vermittelst der Getriebe kann man so viele der in Verbindung bringen, als man will, und dad die Wirkung der Kraft nach Gefallen vermehren.

Es sey der Halbmesser des ersten Rades, an de Umfange die Kraft V angebracht ist, $= R$, der Halbm ser des an eben der Axe befindlichen Getriebes $= r$, des eingreifenden Rades $= R'$, der des zweyten Ge bes $= r'$ u. s. f., so ist der Kraft V am Getriebe die K $\frac{R}{r}$. V äquipollent, also auch am Umfange des zwey Rades, wo dasselbe in das Getriebe eingreift. solche Weise kann man der Kraft V nach und nach Kräfte $\frac{R}{r}.\gamma$, $\frac{RR'}{rr'}.V$ u. s. w. an den Umfängen folgenden Räder substituiren, und wenn man den Ha

messer des letzten Rades $R^{(n)}$, den seiner Welle, woran die Last P hängt, $r^{(n)}$ nennt, so hat man:

$$\frac{R \cdot R' \cdot R'' \ldots R^{(n)}}{r \cdot r' \cdot r'' \ldots r^{(n)}} \cdot V = P, \text{ also}$$

$$V = \frac{r \cdot r' \ldots r'' \ldots r^{(n)}}{R \cdot R' \cdot R'' \ldots R^{(n)}} \cdot P.$$

Form der Zähne.

§. 213.

Der Zahn des Getriebes verläßt den Zahn des daranliegenden Rades nicht sogleich wieder, wie er ihn ergriffen hat, sondern er bewegt sich auf längere oder kürzere Zeit an ihm fort, je nachdem die beyden Räder mehr oder minder tief ineinander greifen. Diese Bewegung muß bey gut eingerichteten Zähnen nie anders als **wälzend** seyn (§. 123.): durch jedes andere Fortrücken der Zähne leidet die ganze Maschine eine Erschütterung, die ihrer Festigkeit nachtheilig ist, und ihr Gang wird wegen der größern Friktion, die dabey statt findet, allemal erschwert.

Eine zweyte nothwendige Bedingung bey den Zähnen ist die, daß die Kraft am Getriebe während der ganzen Zeit, da zwey Zähne mit einander in Berührung sind, beständig einerley Moment behalte, das Rad zu drehen. Ist dies der Fall nicht, so kann die Maschine keinen gleichförmigen Gang annehmen, und das mittlere Moment der Kraft ist um ein Beträchtliches geringer, als im Anfange, wo der eine Zahn auf den andern seine völlige Wirkung ausübt.

Beyde Erforderniſſe ſind von der Art, daß ſie ſich zu gleicher Zeit durch einerley Form des Zahnes erfüllen laſſen. Um dieſe Form kennen zu lernen, und zugleich die Gründe einzuſehen, warum ſie beyde Eigenſchaften in ſich vereinigt, bedarf es einiger Vorbereitungen, die ich in den folgenden beyden §§ voranſchicken will.

§. 214.

Fig. 53. Die **Epicycloide** iſt eine **Curve**, welche von einem Punkte M eines Kreiſes EMO beſchrieben wird, der ſich auf dem Umfange AO eines andern Kreiſes an der converen Seite fortwälzt. Geſchieht die Fortwälzung auf der innern Seite des Umfangs, ſo entſteht dadurch die **Hypocycloide**, und wenn ſie über einer geraden Linie geſchieht, die **Cycloide**.

Anmerkung. *Waring* (Miſcellanea analytica Cap. 2.) nennt überhaupt die krummen Linien, die bey Fortwälzung einer Curve auf einer geraden Linie durch einen Punkt derſelben beſchrieben werden, Curvoiden, und wenn die Baſis ebenfalls eine Curve iſt, Epicurvoiden. Man findet auch in dieſem Werke einige näher Unterſuchungen über dieſe Linien.

§. 215.

Fig. 53. 1) Indem der bewegliche Kreis ſich um ein unendlich kleines Stück ſeines Weges weiter fortwälzt, dreht er ſich um ſeinen Berührungspunkt O, wodurch das folgende Element Oo ſeines Umfangs mit dem folgenden Elemente Oω der Baſis AO in Berührung kommt.

2) Der Umdrehungswinkel iſt alſo = oOω.

3) Um ſo viel dreht ſich nun auch jede andere Li-
, die im Kreiſe durch O geht, um dieſen Punkt;
glich auch MO.

4) Alſo beſchreibt der Punkt M einen Bogen
m, der MO zum Halbmeſſer hat, und den Winkel
Om = oOω am Mittelpunkte O einſchließt.

5) Da auf die Weiſe M zunächſt in m zu liegen
nmt, ſo iſt Mm ein Element der Epicycloide, alſo
O ihre Normale an M, und zugleich ihr Krüm-
ngshalbmeſſer.

6) Dieſe Eigenſchaft erſtreckt ſich auch auf die
ypocycloide, Cycloide, und überhaupt auf jede Linie,
durch einen Punkt einer Curve beſchrieben wird, die
h auf dem Umfange einer andern Curve fortwälzt.

7) Wenn bey der Hypocycloide der Halbmeſſer
O des beweglichen Kreiſes die Hälfte von dem Halb-
eſſer EO der Baſis aO iſt, ſo liegt das Element der-
ben Mm in der geraden Linie ME, die zum Mittel-
nkte E läuft: denn ſowohl Mm (6) als ME ſind
f MO ſenkrecht, alſo fallen beyde zuſammen.

8) Da dies von jedem ihrer Elemente gilt, ſo
lgt, daß ſie alle in einem und demſelben Halbmeſſer
ME liegen müſſen; daher iſt für dieſen Fall die Hypo-
cloide eine gerade Linie, die durch den Mittelpunkt E
s unbeweglichen Kreiſes geht.

§. 216.

Indem zwey zuſammenſtoßende Zähne aneinan-
r fortgleiten, verändern ſie nach und nach ihre Be-

...nden Seiten die Entfer-
... von den Mittelpunk-
... bleibt. Fällt An-
... an den Fuß des einen
... an dem die Kraft durch
... nach und nach wird er aber
... Zahns in Berührung kommt,
... Länge erreicht hat.
... unterscheidet man den ur-
... des Rades von seinem To-
... geht vom Mittelpunkte bi-
... letzterer bis an die Spitze d-
... um die Länge des Zahns v-

§. 217.

... Umstände zu bestimmen,
... treffende Zähne des Rades
... ander fortwälzen, und das
... Kraft unveränderlich ist.
... sey C der Mittelpunkt des
... Rades, M der Punkt, wo die
... in Berührung sind; fern
... = R, der des Getriebes
... letzteres umzutreiben streb-
... Halbmessers r reducirt.
... Forderung müssen bey M
... Zähne zusammenfallen, od-
... gemeinschaftliche Tangente

haben; folglich auch eine gemeinschaftliche Normale MO.

3) Außerdem soll die Last, auf den Endpunkt des Halbmessers R reducirt, der Kraft M gleich seyn, wie in dem Falle, wenn die Richtungen beyder entgegengesetzt sind (§. 209. 4.).

4) Man setze MC = u, so ist der Kraft M am Punkte M die Kraft $\frac{Mr}{u}$ nach der auf MC senkrechten Richtung Mm äquipollent; diese zerlege man in eine senkrecht auf die Fläche des Radzahns oder nach der Normale Mr, und in eine nach MC.

5) Letztere wird durch die Festigkeit des Punktes C aufgehoben; erstere, die wir N nennen wollen, ist allein wirksam, und man hat für sie (§. 48.): $N \sin CMr = \frac{Mr \sin 90°}{u} = \frac{Mr}{u}$, oder $Nu \sin CMO = Mr$.

6) Nun ist im Dreyecke MCO:

$\sin CMO : \sin MOC = OC : MC$ also

$u \sin CMO = OC \cdot \sin MOC$, folglich wird $N \cdot OC \sin MOC = Mr$ oder $N = \frac{Mr}{OC \sin MOC}$.

7) Auf eben die Weise entspringt aus dem gleich großen Widerstande M, nachdem man ihn auf den Punkt M des Hebelarms DM reducirt hat, die Kraft $\frac{M \cdot R}{OD \sin MOD}$ nach MO. Da diese der erstern das Gleichgewicht halten muß, und ihr entgegengesetzt ist,

rührung... und man hat also
nung ... oder
ten d... $\frac{\ldots}{\ldots \text{ MOD}}$
fan...
Za... $\ldots OC + OD = CD = R + r$,
ih... $\ldots D = R$; die Normale muß
g... ...punktslinie CD da eintreffen,
... Räder sich berühren.

§. 218.

Die Zerlegung der Kraft (4) nach
... MC ist nur alsdann möglich,
... zwischen Mr und MC fällt,
... Winkel ist. Da dies statt fin-
... der Winkel MCO seyn mag,
... MOC stumpf seyn müsse; daher ist
... oder die Entfernung des angrei-
... C größer als r (8). Gegenseitig
... R seyn müsse.
... des Getriebes ragt also über dessen
... und der Radzahn liegt dagegen inner-
... des Rades; daher bezeichnet hier r
... Halbmesser des Getriebes, und R
... des Rades. Man sagt in diesem
... greife in das Rad ein.
... auch der Fall eintreten, daß das Ge-
... Rad in Umlauf gebracht wird, alsdann
... Rade, wie es vorhin vom Getriebe
...kehrt.

§. 219.

§. 219.

ıtz. Wenn das Rad durch das Ge-
mlauf gebracht wird, so lassen sich
Forderungen (§. 213.) erfüllen, wenn
es Getriebes eine Epicycloide, und
des eine Hypocycloide ist, die durch
ıg eines und desselben Kreises auf
ı Umfange des Getriebes und dem in-
nge des Rades entstehen.

weis 1) Man nehme an, die Punkte F
etriebe und Rade seyen Anfangs in O bey-
esen, jetzt aber habe sich F bereits um den
on O entfernt, so ist während der Zeit ein
ses Stück GO vom Umfange des Rades
ınkt O durchgeführt.

sey nun f der Halbmesser des Kreises, durch
ilzung auf FO und GO der Zahn des Ge-
des Rades entsteht; man mache Oo = f,
ıs c den Kreis EMO, und nehme auf sei-
ge den Bogen MO = FO, so ist M ein
Epicycloide FM, und zugleich auch, weil
st, ein Punkt in der Hypocycloide GM.

ffen daher beyde Zähne gerade in diesem
usammen, so haben sie daselbst eine gemein-
Normale MO (§. 21. 5.), folglich auch
haftliche Tangente, und überdies schneidet
die Mittelpunktslinie CD in dem Punkte
Umfänge des Rades und des Getriebes sich

so müssen beyde einander gleich se

$$\frac{Mr}{OC \cdot Sin\ MOC} = \frac{M}{OD\ Si}$$

$OC : OD = r : R$.

8) Nun ist aber OC +

folglich $OC = r$, und OD =

also jedesmal in die Mittelpun

wo die Umfänge der beyden

§. 21

Folgerung 1. Die Zä

den Richtungen Mr und M

wenn ihre Richtung Mm

also rMC ein stumpfer W

den muß, wie klein auch

so folgt, daß auch MOC

allemal $MC > OC$, od

fenden Punktes von C

erhellet, daß $MD <$

2. Der Zahn

Umfange hervor, u

halb dem Umfang

den ursprünglichen

den Totalhalbmes

Falle, das Getrie

3. Es kann

triebe durch das

gilt alles so vom

galt, und umgek

4

die beyd

zusam

5

setzung

irgend einer

sie auch

Ff weiter

viel weiter

wieder

im Umfang

gO =

Radzahns.

6)

letztern,

sammen ge

FO = o

wächst, m

bis zu der

Anmerk.

man stat

ne, und

die Ep

Vielleicht

risse der

Fig. 56. Folg

wird die

Mittelpunkte des

Falle der Umriß

Aus

Getriebe

erige

§. 219.

Lehrſatz. **Wenn das Rad durch das Getriebe in Umlauf gebracht wird, ſo laſſen ſich die beyden Forderungen (§. 213.) erfüllen, wenn der Zahn des Getriebes eine Epicycloide, und der des Rades eine Hypocycloide iſt, die durch Fortwälzung eines und deſſelben Kreiſes auf dem äußern Umfange des Getriebes und dem innern Umfange des Rades entſtehen.**

Fig. 55. **Beweis** 1) Man nehme an, die Punkte F und G im Getriebe und Rade ſeyen Anfangs in O beyſammen geweſen, jetzt aber habe ſich F bereits um den Bogen FO von O entfernt, ſo iſt während der Zeit ein eben ſo großes Stück GO vom Umfange des Rades durch den Punkt O durchgeführt.

2) Es ſey nun f der Halbmeſſer des Kreiſes, durch deſſen Umwälzung auf FO und GO der Zahn des Getriebes und des Rades entſteht; man mache Oo = f, beſchreibe aus c den Kreis EMO, und nehme auf ſeinem Umfange den Bogen MO = FO, ſo iſt M ein Punkt in der Epicycloide FM, und zugleich auch, weil GO = FO iſt, ein Punkt in der Hypocycloide GM.

3) Treffen daher beyde Zähne gerade in dieſem Punkte M zuſammen, ſo haben ſie daſelbſt eine gemeinſchaftliche Normale MO (§. 21. 5.), folglich auch eine gemeinſchaftliche Tangente, und überdies ſchneidet die Normale die Mittelpunktslinie CD in dem Punkte O, wo die Umfänge des Rades und des Getriebes ſich berühren (§.

ckelt: der ausgespannte Theil MO
Kreis in dem Punkte O, wo er sei-
und hat mit dem Bogen FO, wo-
t, einerley Länge; gerade so, als
s O auf dem Umfange des Kreises

ält sich diese Curve in allem Be-
cloide, von der sie nur eine beson-
o z. B. ist MO im Punkte M auf
ugleich der Krümmungshalbmesser

§. 225.

e gründet sich auf die Voraussetz
n Zähne sich Anfangs im Punkte
ren, die auf der Fläche des Rades
setze nun, es habe sich der Zahn
um den Bogen OF von O ent-
der Zeit der Kamm in gerader Li-
R = OF fortgerückt; zieht man
rallel, oder auf CO senkrecht, und
so ist M sowohl ein Punkt im
e auch im Kamme; folglich treffen
nem Punkte der Linie zusammen,
Getriebes in O berührt.

§. 226.

am Umfange des Getriebes eine
e bey jeder Lage des Zahns FM al-
losenden Kamm MB, senkrecht ge-

lauf gebracht wird, liege in einer Ebe
des Rades in AD senkrecht schneidet,
Linie parallel.

Indem nun der Zahn des Getri
Rades von A bis R fortschiebt, en
AD um die Sehne IR, und gl
dem Zahne des Getriebes um das
Letztere Bewegung geschieht ohne
hat folglich auf den Gang der
fluß; daher kommt hier allein
Kammes nach der geraden Linie

§. 22

Das Kronrad kann al
greifens der Zähne als ein E
wovon das Stück des Umf
Getriebes fortgeführt wird,
unendlich großen Halbmesse
Kamme desselben einen ger
der Halbmesser des Kreises
triebezahns beschreibt, une
folgt, daß der Zahn
Kronrad eingreift,
geraden Linie beschri
Umfange des Getrie

Fig. 59. Man sieht
einerley sey, die der
beschreibt, den man

lauf gebracht wird, liege in einer Ebene, die die Fläche des Rades in AD senkrecht schneidet, und sey mit dieser Linie parallel.

Indem nun der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades von A bis R fortschiebt, entfernt dieser sich von AD um die Sehne IR, und gleitet außerdem längs dem Zahne des Getriebes um das Stück AI zur Seite. Letztere Bewegung geschieht ohne alle Hindernisse, und hat folglich auf den Gang der Maschine keinen Einfluß; daher kommt hier allein nur die Bewegung des Kammes nach der geraden Linie IR in Betracht.

§. 223.

Das Kronrad kann also in Ansehung des Eingreifens der Zähne als ein Sternrad betrachtet werden, wovon das Stück des Umfangs, das vom Zahne des Getriebes fortgeführt wird, geradlinigt ist, oder einen unendlich großen Halbmesser hat; giebt man daher dem Kamme desselben einen geradlinigten Umriß, so ist auch der Halbmesser des Kreises, der die Epicycloide des Getriebezahns beschreibt, unendlich (§. 220. 1.). Daraus folgt, **daß der Zahn des Getriebes, das in ein Kronrad eingreift, durch den Endpunkt einer geraden Linie beschrieben werde, die sich auf dem Umfange des Getriebes fortwälzt.**

§. 224.

Fig. 59. Man sieht offenbar, daß diese Curve mit der einerley sey, die der Endpunkt M eines Fadens MOE beschreibt, den man vom Umfange eines Kreises FOE

nach und nach abwickelt: der ausgespannte Theil MO berührt nemlich den Kreis in dem Punkte O, wo er seinen Umfang verläßt, und hat mit dem Bogen FO, wovon er abgewickelt ist, einerley Länge; gerade so, als wenn er sich von F bis O auf dem Umfange des Kreises fortgewälzt hätte.

Uebrigens verhält sich diese Curve in allem Betracht, wie die Epicycloide, von der sie nur eine besondere Art ausmacht; so z. B. ist MO im Punkte M auf ihr senkrecht, und zugleich der Krümmungshalbmesser für diese Stelle.

§. 225.

Das Bisherige gründet sich auf die Voraussetzung, daß die beyden Zähne sich Anfangs im Punkte O der Linie CI berühren, die auf der Fläche des Rades senkrecht ist. Man setze nun, es habe sich der Zahn des Getriebes bereits um den Bogen OF von O entfernt, so ist während der Zeit der Kamm in gerader Linie (§. 222.) um IR = OF fortgerückt; zieht man daher OM mit IR parallel, oder auf CO senkrecht, und macht OM = OF, so ist M sowohl ein Punkt im Zahne (§. 219.), wie auch im Kamme; folglich treffen beyde beständig in einem Punkte der Linie zusammen, die den Umfang des Getriebes in O berührt.

§. 226.

Wirkt demnach am Umfange des Getriebes eine Kraft M, so ist diese bey jeder Lage des Zahns FM allemal auf den vorausstoßenden Kamm MR senkrecht ge-

§. 228.

Wenn der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades verläßt, so ist der Kraft M am Getriebe noch die Kraft M Cos ζ am Umfange des Rades äquipollent. Setzt man darin für Sin ζ seinen Werth, so erhält man

$$M \text{ Cos } \zeta = M\sqrt{(1 - \frac{4\pi^2 r^2}{n^2 R^2})}.$$

Dieser Ausdruck weicht desto weniger von M ab, je kleiner r, und je größer nR ist; also kann man den Verlust, den die Kraft am Getriebe durch das Eingreifen der Zähne leidet, auf zweyerley Art vermindern:

1) Wenn man das Getriebe im Verhältnisse des Rades klein genug nimmt.
2) Wenn man ihm so viel Zähne giebt, als es die Sicherheit des Eingreifens nur immer gestattet.

Im vorigen Exempel wird M Cos ζ = 0,97782 M, also der mittlere Werth des wirksamen Antheils von M = 0,98891 M.

§. 229.

Dieselbe Vorstellung vom Kronrade (§. 223.), woraus die bisherigen Folgerungen genommen sind, leitet nun ferner auch auf die Form, welche sowohl der Kamm als der Zahn des Getriebes haben muß, wenn beyde Anfangs vor der Linie CI zusammentreffen, und sich erst hinter derselben in eben der Distanz wieder verlassen. Alsdann wird nemlich (§. 220. 4.) (Fig. 60.) der Zahn des Getriebes zunächst am Umfange geradlinigt, bis an den Punkt O, womit er in CI den Kamm

berührt; von da an, bis zu ſeiner Spitze, behält er ſeine vorige Krümmung (§. 223.). Der Kamm hingegen ragt nun über O hinaus, bleibt nur von I bis O geradlinigt, und bekommt oberhalb die Geſtalt einer Cycloide, die durch den Punkt eines Kreiſes vom Halbmeſſer $\frac{1}{2}$ r beſchrieben wird, der ſich auf der geraden Linie OM von O bis M fortwälzt.

Da die Zähne des Getriebes jetzt nicht mehr um den Winkel OCf, ſondern um das Doppelte deſſelben FCf auseinander liegen, ſo wird bey eben der Anzahl von Zähnen die Länge OM halb ſo groß als vorhin, alſo der gekrümmte Theil vom Zahne des Getriebes etwas kürzer; das Uebrige bleibt alles ungeändert.

Pochſtämpfer.

§. 230.

Der Mechaniſmus der Stampfmühlen beſteht bekanntlich darin, daß vertikal gerichtete Balken vermittelſt ſeitwärts angebrachter Zapfen durch die Zähne einer Welle in die Höhe gehoben werden, und, ſobald dieſe von den Zapfen abgleiten, vermöge ihres eigenen Gewichtes wieder herabfallen.

Fig. 61. Ein ſolcher Balken AB heißt ein **Stempel**, der daranliegende Zapfen DM die **Hebelatte**, und der Zahn FM der **Daumen** oder die **Warze**. Damit der Stempel ſtets ſeine vertikale Lage behalte, umſchließt man ihn an zweyen Stellen mit feſten Seitenwänden Ee und Gg, worin er ſich auf und nieder bewegen kann; dieſe heißen **Leitungen** oder auch **Scheidelatten**.

§. 228.

Wenn der Zahn des Getriebes den Kamm des Rades verläßt, so ist der Kraft M am Getriebe noch die Kraft M Cos ζ am Umfange des Rades äquipollent. Setzt man darin für Sin ζ seinen Werth, so erhält man

$$M \text{ Cos } \zeta = M\sqrt{(1 - \frac{4\pi^2 r^2}{n^2 R^2})}.$$

Dieser Ausdruck weicht desto weniger von M ab, je kleiner r, und je größer nR ist; also kann man den Verlust, den die Kraft am Getriebe durch das Eingreifen der Zähne leidet, auf zweyerley Art vermindern:

1) Wenn man das Getriebe im Verhältnisse des Rades klein genug nimmt.
2) Wenn man ihm so viel Zähne giebt, als es die Sicherheit des Eingreifens nur immer gestattet.

Im vorigen Exempel wird M Cos ζ = 0,97782 M, also der mittlere Werth des wirksamen Antheils von M = 0,98891 M.

§. 229.

Dieselbe Vorstellung vom Kronrade (§. 223.), woraus die bisherigen Folgerungen genommen sind, leitet nun ferner auch auf die Form, welche sowohl der Kamm als der Zahn des Getriebes haben muß, wenn beyde Anfangs vor der Linie CI zusammentreffen, und sich erst hinter derselben in eben der Distanz wieder verlassen. Alsdann wird nemlich (§. 220. 4.) (Fig. 60.) der Zahn des Getriebes zunächst am Umfange geradlinigt, bis an den Punkt O, womit er in CI den Kamm

berührt; von da an, bis zu seiner Spitze, behält er seine vorige Krümmung (§. 223.). Der Kamm hingegen ragt nun über O hinaus, bleibt nur von I bis O geradlinigt, und bekommt oberhalb die Gestalt einer Cycloide, die durch den Punkt eines Kreises vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r beschrieben wird, der sich auf der geraden Linie OM von O bis M fortwälzt.

Da die Zähne des Getriebes jetzt nicht mehr um den Winkel OCf, sondern um das Doppelte desselben FCf auseinander liegen, so wird bey eben der Anzahl von Zähnen die Länge OM halb so groß als vorhin, also der gekrümmte Theil vom Zahne des Getriebes etwas kürzer; das Uebrige bleibt alles ungeändert.

Pochstämpfer.

§. 230.

Der Mechanismus der Stampfmühlen besteht bekanntlich darin, daß vertikal gerichtete Balken vermittelst seitwärts angebrachter Zapfen durch die Zähne einer Welle in die Höhe gehoben werden, und, sobald diese von den Zapfen abgleiten, vermöge ihres eigenen Gewichtes wieder herabfallen.

Fig. 61. Ein solcher Balken AB heißt ein **Stempel**, der daranliegende Zapfen DM die **Hebelatte**, und der Zahn FM der **Daumen** oder die **Warze**. Damit der Stempel stets seine vertikale Lage behalte, umschließt man ihn an zweyen Stellen mit festen Seitenwänden Ee und Gg, worin er sich auf und nieder bewegen kann; diese heißen **Leisungen** oder auch **Scheidelatten**.

§. 228.

Wenn der Zahn des Getrieb
des verläßt, so ist der Kraft M
Kraft M Cos ζ am Umfange d
Setzt man darin für Sin ζ seinen

$$M \operatorname{Cos} \zeta = M \sqrt{(1 - \frac{4\pi^2 1}{n^2 P}}$$

Dieser Ausdruck weicht
je kleiner r, und je größer nP
Verlust, den die Kraft am Get
fen der Zähne leider, auf zwei
1) Wenn man das Getrie
Rades klein genug nimm
2) Wenn man ihm so viel
Sicherheit des Eingreif
Im vorigen Exempel w
M, also der mittlere Werth
von M = 0,98891 M.

§.

Dieselbe Vorstellung
woraus die bisherigen Fol
tet nun ferner auch auf d
Kamm als der Zahn des
beyde Anfangs vor der L
sich erst hinter derselben i
lassen. Alsdann wird n
der Zahn des Getriebes
nigt, bis an den Punkt

tendruck. Da die centrische Linie des Stempels durch seine Mitte geht, also der angegriffene Punkt M von ihr um $f + \frac{1}{2} g$ entfernt liegt, so ist dieser Druck $= \frac{(f + \frac{1}{2} g) R}{na (r + e)} . M.$

Das Eingreifen der Triebstöcke.

§. 233.

Lehrsatz. Wenn die Zähne eines Rades in die Triebstöcke eines Getriebes eingreifen, und letztere als Linien ohne Dicke angenommen werden, so muß der Radzahn die Gestalt einer Epicycloide haben, bey der der bewegliche Kreis mit dem Getriebe, und die Basis mit dem Rade einerley Halbmesser hat.

Fig. 62. **Beweis** 1) Der Querschnitt eines solchen Triebstockes ist ein Punkt in des Getriebes Umfange. Diesen führt der Zahn des Rades, indem er sich von O um den Bogen GO entfernt, durch einen gleich großen Bogen MO.

2) Nimmt man also auf dem Umfange des Getriebes den Bogen MO = GO, so muß der Punkt M in dem Umrisse des Zahnes GM liegen, und zugleich muß die Sehne MO auf ihm senkrecht seyn (§. 217.).

3) Beydes wird erfüllt, wenn die Curve GM eine Epicycloide ist, die der Punkt M beschreibt, indem der Bogen MO sich auf dem Umfange des Rades von G bis O fortwälzt.

§. 234.

Ein Kreis kann ſich auf dem innern Umfange eines andern nicht fortwälzen, wenn beyde gleich groß ſind; alſo artet dann die Hypocycloide in einen Punkt aus. Sieht man daher den Querſchnitt eines unendlich dünnen Triebſtocks als eine Hypocycloide an, ſo giebt auch über dieſen Fall die allgemeine Theorie der Zähne Auskunft, und führt auf eben die Form des Radzahnes, die im vorigen §. angegeben iſt.

Außerdem zeigt ſich aus dieſer Betrachtung, daß das erſte Zuſammentreffen des Zahnes mit dem Triebſtocke nothwendig im Punkte O der Linie CD geſchehen müſſe; wollte man ihn früher in den Triebſtock eingreifen laſſen, ſo müßte letzterer die Form einer Epicycloide haben, und könnte alſo kein Punkt ſeyn.

Soll dagegen der Triebſtock den Zahn fortführen, ſo müſſen im Gegentheil beyde vor der Linie eD ſich zuerſt berühren, und wenn ſie bis O gekommen ſind, ſich wieder verlaſſen.

§. 235.

Es ſey jetzt der Triebſtock ein wirklicher cylindriſcher Stab, alſo ſein Querſchnitt ein Kreis, ſo verhält ſich nun die Sache bloß in ſofern anders, daß die Epicycloide GM durch den Mittelpunkt M dieſes Kreiſes geht, und der eigentliche Umriß des Zahnes ihn irgendwo in ſeinem Umfange berührt. Es ſey μ der Berührungspunkt, ſo wird erfordert, daß μO ſowohl auf der Curve des Zahnes, als auch auf dem Kreiſe ſenkrecht

endruck. Da die centrische Linie d
seine Mitte geht, also der angegriff
ihr um $r + \frac{1}{2}g$ entfernt liegt, so i
$\frac{(r+\frac{1}{2}g)R}{na(r+e)}$. M.

Das Eingreifen der T

§. 233.

Lehrsatz. Wenn die Zähne
Triebstocke eines Getriebes eingreifer
Linien ohne Dicke angenommen we
Radzahn die Gestalt einer Epicycl
der bewegliche Kreis mit dem Get
mit dem Rade einerley Halbmesser

fig. 62. **Beweis** 1) Der Au
Triebstockes ist ein Punkt in d
Diesen führt der Zahn des Rad
um den Bogen GO entfernt,
Bogen MO.

2) Nimmt man also c
trieben den Bogen MO =
M in dem Umrisse des
gleich muß die Sehne
(§. 217.).

3) Beydes wird
Epicycloide ist, die der
Bogen MO sich auf
bis O fortwälzt.

$= \frac{mr}{Mr} = \varkappa$. Die beyden Tangenten schneiden

daher jederzeit unter einem und demselben Winkel.

7. Es ist $MP = TP \cdot \text{tang}\,\alpha$, folglich $TP = \frac{MP}{\varkappa} = AP$. Legt man also ein rechtwinklichtes Dr

eck MTP, dessen Winkel an der Grundlinie

ist, so um die Fläche des Cylinders, daß seine Gr

linie TM in den Umfang des Kreises APB fällt,

kommt seine Hypothenuse TM in die Schrauben

AM zu liegen.

8. Wählt man zum ersten Radius statt CA e

andern CF, und setzt die erste Ordinate $FI = g$,

Winkel $FCP = \varphi'$, und $ACF = \gamma$, so erhält

$g = \frac{h\gamma}{2\pi}$, $\varphi = \gamma + \varphi'$, folglich $y = \frac{h(\gamma + \varphi'}{2\pi}$

$= g + \frac{h\varphi'}{2\pi}$

§. 238.

Fig. 64. Wenn um zwey Cylinder, die eine gemei

schaftliche Axe Cc haben, zwey Schraubengänge von

einerley Höhe h gehen, und der Anfangspunkt α des

innern Schraubenganges mit dem Anfangspunkte A

des äußern zwar in derselben Ebene ACc, aber um das

Stück $a\alpha = g$ höher liegt, so ist für einerley Winkel

$ACP = \varphi$ die Ordinate $MP = \frac{h\varphi}{2\pi}$, und $p\mu = g + \frac{h\varphi}{2\pi}$

also beyder Unterschied allemal $= g$. Zieht man da-

her MI mit PC parallel, und nennt den Halbmesser des

Grundfläche des größern Cylinders R, den der Grundfläche des kleinern r, so ist $Mo = R - r$, $o\mu = g$, also tang $M\mu o = \frac{R-r}{g}$, folglich $M\mu$ gegen die Axe Cc durchgängig unter einerley Winkel geneigt.

§. 239.

Eine Fläche, die durch alle die Linien $M\mu$ geht, heißt eine **Schraubenfläche**. Legt man zugleich eine andere durch eben das Stück des äußern Schraubenganges und das zunächst darunter liegende Stück des innern, so bilden beyde Flächen am äußern Schraubengange eine Kante $\lambda M\mu$, und es geht dann über den inneren Cylinder eine Art von gewundenem dreyeckigen Prisma, wodurch die sogenannte **Schraube** entsteht.

§. 240.

Anmerk. 1. Da $\lambda\mu = h$ ist, so muß $g = \frac{1}{2} h$ seyn, wofern die Seitenlinien λM und μM gegen die Axe des Cylinders (der Spindel) einerley Neigung haben sollen; dies ist aber nicht durchaus nothwendig.

2. Für $g = o$ ist $M\mu$ auf der Axe der Spindel senkrecht; in diesem Falle läßt man zwey Schraubenflächen AM, am parallel neben einander fortlaufen, und was bis an den Umfang des äußern Cylinders dazwischen liegt, bleibt auf der Spindel stehen, so daß nun der körperliche Schraubengang, der sich um die Spindel herumwindet, viereckig wird.

§. 241.

Wenn in einen hohlen Cylinder, dessen Oeffnung

mit der Spindel einer Schraube gleichen Halbmesser hat, inwendig Vertiefungen eingegraben werden, in welche die Schraubengänge jener genau hineinpassen, so hat man eine **innere Schraube** oder **Schraubenmutter.**

§. 242.

1. Die äußere Schraube ist in der innern beweglich; denn jedes Stück ihres Schraubenganges hat mit dem andern einerley Form und Lage, und kann also ohne Hindernisse in dessen Stelle treten.
2. Die Bewegung geschieht nach der Richtung der Schraubenlinie, und besteht daher in einer Umdrehung um die Axe der Spindel, und in einem dieser Axe parallelen Fortrücken.
3. Wenn also die Spindel gedrehet wird, so muß die Schraube zu gleicher Zeit parallel mit ihrer Axe steigen oder fallen.
4. Gegenseitig kann letzteres nur geschehen, wenn ersteres zugelassen wird.

§. 243.

Fig. 65. **Aufgabe.** Auf eine Schraube, die in einer unbeweglichen Schraubenmutter enthalten ist, wirken zwey Kräfte: die eine Kraft V strebt dieselbe vermittelst eines Hebelarmes, worauf sie senkrecht angebracht ist, um ihre Axe zu drehen; die andere P drückt auf sie nach einer mit der Axe parallelen Richtung; man fragt, wie beyde Kräfte sich zu einander verhalten müssen, damit Gleichgewicht zwischen ihnen statt finde.

Aufl. 1) Durch die Kraft P wird die Fläche der äußern Schraube gegen die darunter liegende Fläche der Schraubenmutter gedrückt, und dieser Druck vertheilt sich auf letztere gleichförmig.

2) Wenn also n Schraubengänge vorhanden sind, so ist der Druck auf jede derselben $= \frac{P}{n}$, und davon kommt auf jedes seiner Elemente, das zwischen dem Winkel $d\Phi$ enthalten ist, der Theil $\frac{Pd\Phi}{2n\pi}$, der für jetzt p heißen mag.

3) Es sey MNmn ein solches Element der Fläche des hohlen Schraubenganges: man lege durch M eine auf die Axe der Spindel senkrechte Ebene, fälle darauf die Perpendikel NO, no, ml, ziehe Mo, Oo, lo, und verlängere Oo und Nn, bis sie sich in T schneiden; so sind Mo und lo Stücke von den Radien, die den Winkel $d\Phi$ am Mittelpunkte des durch M gehenden senkrechten Querschnittes einschließen; also $MOT = 90^{\circ}$, und $NTO = \alpha$ (§. 237. 6.).

4) Man fälle ferner NI auf MT senkrecht, und ziehe IO, so ist NIO der Neigungswinkel des schrägen Elementes gegen gedachten Querschnitt. Es sey dieser $= I$, der Winkel $NMO = \vartheta$, $OMT = \lambda$, so hat man in der rechtwinklichten Ecke bey M: $\text{tang } I = \frac{\text{tang } \vartheta}{\text{Sin } \lambda}$.

5) Die Kraft p, die nach NO wirkt, zerlege man in eine senkrecht auf das Element, und in eine parallel

mit OI, ſo iſt erſtere $= \frac{p}{\text{Cos } I}$ (§. 118.), die aufgehoben wird; letztere $= p \text{ tang } I$.

6) Dieſe zerlege man noch in eine nach OM, und in eine ſenkrecht darauf. Erſtere, $= p \text{ tang } I \text{ Cos IOM} = p \text{ tang } I \text{ Sin } \lambda$, drückt gegen die Axe der Schraube, und wird folglich durch einen gleichen Druck eines gegenüber liegenden Elementes zerſtört; die andere $= p \text{ tang } I \text{ Cos } \lambda$, ſtrebt eine Umdrehung der Schraube um ihre Axe zu bewirken.

7) Nennt man r den Halbmeſſer der Schraube, ſo iſt ihr Umdrehungsmoment $= pr \text{ tang } I \text{ Cos } \lambda = pr \frac{\text{tang } \vartheta}{\text{tang } \lambda}$ (4).

8) Da nun $NO = OM \text{ tang } \vartheta$
$TO = OM \text{ tang } \lambda$
ſo erhält man

$$\frac{\text{tang } \vartheta}{\text{taug } \lambda} = \frac{NO}{TO} = \text{tang } \alpha = \varkappa = \frac{h}{2\pi r} \text{ (§. 237.)};$$

folglich wird jenes Moment $= \frac{ph}{2\pi} = \frac{Phd\varphi}{4n\pi^2}$.

9) Die Summe von dieſen einzelnen Momenten iſt $= \frac{Ph\varphi}{4n\pi^2}$; alſo für $\varphi = 2\pi$, oder für einen Schraubengang $= \frac{Ph}{2n\pi}$, und daher für alle n Schraubengänge $= \frac{Ph}{2\pi}$.

10) Dieſem Momente muß das entgegengeſetzte

der Kraft V gleich seyn, welches, wenn man die Länge des Hebelarmes, woran sie wirkt, f nennt, $= Vf$ ist. Man hat daher $\frac{Ph}{2\pi} = Vf$, oder $Ph = 2\pi Vf$.

§. 244.

Die Schraube gehört zu den einfachen Hebmaschinen, wodurch man Lasten in die Höhe treiben, oder Widerstände jeder andern Art zum Weichen bringen kann. Man bringt sie zu dem Ende unter die Last oder gegen den Widerstand senkrecht, befestigt auf irgend eine Weise ihre Einfassung, damit diese dem Seitendrucke (5) nicht nachgebe, und steckt durch die Spindel einen Hebelarm, auf den die Kraft senkrecht angebracht wird. Die Schraube leidet alsdann oben, wo sie angestemmt ist, einen Druck P, wodurch sie zum Niedersteigen in der Schraubenmutter, folglich zugleich zu einer Umdrehung um ihre Axe sollicitirt wird. Durch eine Kraft $V = \frac{Ph}{2\pi f}$ am Hebelarme wird dieses Drehen, also auch das Herabsteigen der Schraube verhindert (§. 242. 4.), und im Gegentheil, wenn die Kraft gröſser als $\frac{Ph}{2\pi f}$ ist, so wird sie nur zum Theil aufgehoben, und kann mit dem Ueberreste die Schraube frey um ihre Axe drehen, und dadurch die Last zum Weichen bringen.

Man sieht übrigens, daß die Kraft im Verhältnisse gegen die Last desto geringer zu seyn braucht, je länger

der Hebelarm f, und je kleiner die Höhe der Schraubengänge h iſt.

Die Preſſe.

§. 245.

Fig. 66. Die ſogenannten Preſſen ſind Schrauben von entgegengeſetzter Einrichtung. Bey dieſen iſt nemlich die äußere Schraube auf dem Boden AG befeſtigt, und dagegen die Einfaſſung vermittelſt der Schraubenmutter um ſie beweglich.

Der zuſammengedrückte Körper übt zunächſt einen Widerſtand auf das Brett CD aus, der ſich auf die beyden Schraubhölzer mp und nq vertheilt, und dadurch die Schraubenmutter gegen die Fläche der äußern Schraube drückt. Da dieſer Druck mit der Axe der Spindel parallel geſchieht, ſo geht ein Theil davon längs dem Schraubengange herab, und würde die Schraubhölzer zur Umdrehung bringen, wenn dies nicht durch eine Kraft, die an ihren Hebelarmen nach entgegengeſetzter Richtung wirkt, verhindet würde.

Das Verhältniß der Kraft zum Widerſtande iſt dabey, wie man leicht einſieht, ganz daſſelbe, wie im erſtern Falle.

Die Schraube an der Axe.

§. 246.

Fig. 67. Es giebt noch eine dritte Zuſammenſetzung der äußern Schraube mit der innern, bey welcher beyde

Theile zugleich beweglich sind, aber jeder nur eine Bewegung einfacher Art anzunehmen fähig ist. Die äussere Schraube kann sich nemlich nur um ihre Axe OZ drehen, und die innere liegt in einem ausgehöhlten viereckigen Prisma FHGI, das von zweyen Seitenwänden AC und BD umschlossen ist, und sich zwischen diesen bloß hin und her schieben läßt. Wird nun erstere gedrehet, so kommt der Punkt m ihres Schraubenganges nach und nach mit den Punkten des dareingreifenden hohlen Schraubenganges mo in Berührung, und hebt diese bis in die Fläche des senkrechten Querschnittes mn, in welcher seine Umdrehung geschieht; so daß jedesmal, nachdem er einen Bogen von 180° beschrieben hat, oder von m bis n gelangt ist, der Punkt o der innern Schraube, und mit ihm das ganze Prisma um on, d. h. um die halbe Höhe eines Schraubenganges, gestiegen ist.

§. 247.

Aufgabe. Von zweyen Kräften V und P strebt erstere vermittelst eines Hebelarms die äußere Schraube um ihre Axe OZ zu drehen, und dadurch das Prisma FHGI zu heben; letztere verhindert dies, indem sie auf die obere Fläche GI des Prisma's senkrecht drückt, und hält so der andern das Gleichgewicht; man fragt, wie beyde Kräfte sich zu einander verhalten müssen.

Aufl. 1) Die Kraft P, womit das Prisma zu sinken strebt, zertheilt sich in so viele Theile, als seine innere Schraubenfläche Elemente hat; daher bleibt al-

les so, wie zu Anfange des §. 243., nur bedeutet hier MmNn ein Element der äußern Schraubenfläche, und der darauf senkrechte Druck $\frac{p}{\cos I}$, der dort aufgehoben wurde, ist jetzt der allein wirksame Antheil von p, indem der andere Theil p tang I, dessen Richtung mit OI parallel ist, das Prisma gegen die Seitenwand drückt, und dadurch vernichtet wird.

2) Man zerlege nun ferner die Kraft $\frac{p}{\cos I}$, deren Richtung NR in der Ebene INO liegt, und auf IN senkrecht ist, in eine nach $NO = \frac{p}{\cos I} . \cos ONR = p$, und in eine darauf senkrechte $= \frac{p}{\cos I} . \sin I = p \tang I$.

3) Erstere hat kein Moment, die Schraube um ihre Axe zu drehen, weil ihre Richtung NO mit der Axe parallel ist; letztere hingegen, deren Richtung mit IO parallel läuft, zerfällt in eine nach $MO = p \tang I \sin \lambda$, die gegen die Axe drückt, und dadurch aufgehoben wird; und in eine auf MO senkrechte, $= p \tang I \cos \lambda = p \frac{\tang \vartheta}{\tang \lambda}$, die auf die Umdrehung der Schraube verwandt wird.

4 Vergleicht man hiermit §. 243 . 6, so sieht man, daß hier eben das Umdrehungsmoment aus p entspringt, wie dort, folglich am Ende wieder dieselbe Gleichung $2\pi Vf = Ph$ herauskommt.

Die Schraube ohne Ende.

§. 248.

Wenn die Schraube an der Axe in die Zähne eines daran liegenden Rades eingreift, und dadurch das Rad in Umlauf bringt, so nennt man sie die **Schraube ohne Ende.**

Fig. 68. Das Eingreifen des Schraubenganges geschieht dabey auf eben die Art, wie im vorhergehenden Falle; indem nemlich durch eine halbe Umdrehung der Spindel der Punkt m auf die andere Seite des Querschnittes mp in p zu liegen kommt, wird der ganze Schraubengang mo in die Lage np versetzt, und schiebt so den Zahn des Rades, der ihn in o berührt, um op, parallel der Axe, fort.

§. 249.

Fig. 69. Es sey AZ die Axe der Schraube, COD eine auf AZ senkrechte Linie, die durch den Mittelpunkt des Rades C geht, so sind zum richtigen Eingreifen der Schraube folgende Bedingungen nothwendig:

1) Der Schraubengang MZ muß den Zahn des Rades FM vor der Linie COD ergreifen, und ihn bis O führen.

2) Er muß viereckig (§. 240. 2.) seyn, damit der Zahn nicht seitwärts abgleiten könne.

3) Die Berührung beyder muß beständig in der mit AZ parallelen Linie MO geschehen, damit das Moment der Schraube, das Rad zu drehen, unveränderlich bleibe.

Man sieht also, daß die Punkte des Zahnes in einem Faden MO liegen müssen, der vom Umfange des Rades von F bis Q abgewickelt wird; nur kann hier sein Umriß nicht, wie im §. 223., vom Endpunkte des Fadens beschrieben werden, weil wegen der Schiefe des Schraubenganges die Linie MO mit dem Bogen FQ nicht einerley Länge hat.

Um die jedesmalige Länge MO zu finden, die man auf dem abgewickelten Theile des Fadens bis an den Punkt M nehmen muß, der in der Curve des Zahnes liegt, setze man den Winkel FCO $= \varphi$, der Halbmesser des Rades $= R$, die Länge MO $= u$, so ist FO $= R\varphi$, Oo $= Rd\varphi$; also, wenn der Faden um das Stück Oo weiter abgewickelt wird, und dabey M in m zu liegen kommt: no $=$ nO $+$ Oo $= u + Rd\varphi$.

Fernet sey Mm das an M liegende Element der Curve. Da dies mit dem daran stoßenden Stücke des Schraubenganges MZ einerley Lage haben muß, und Mn auf MO senkrecht, also mit OD parallel ist, so hat man nMm $=$ DOA, der Schiefe des Schraubenganges, also tang nMm $= \varkappa$ (§. 237.); daher wird mn $= \varkappa$. Mn $= \varkappa u d\varphi$, folglich du $=$ mo $-$ MO $= u + Rd\varphi - \varkappa u d\varphi - u = Rd\varphi - \varkappa u d\varphi$, also $d\varphi = \frac{du}{R - \varkappa u}$ oder $-\varkappa d\varphi = \frac{-\varkappa du}{R - \varkappa u}$, wovon die Integralgleichung: $C - \varkappa\varphi = \log(R - \varkappa u)$ ist.

Für $\varphi = o$, ist auch $u = o$, also $O = \log R$, daher erhält man: $\varkappa\varphi = \log\left(\frac{R}{R - \varkappa u}\right)$, $\frac{R}{R - \varkappa u}$

$= e^{\varkappa\varphi}$, $R - \varkappa u = R \cdot e^{-\varkappa\varphi}$, und $u = \frac{R}{\varkappa} \cdot (1 - e^{-\varkappa\varphi})$.

Setzt man den abgewickelten Theil des Fadens $= s$, und $\frac{R}{\varkappa} = c$, so wird, weil $s = FO = R\varphi$ ist, $\varphi = \frac{S}{R}$, also $u = c\,(1 - e^{-\frac{s}{c}})$.

Die Construktion des Zahnes ist also folgende: Man wickele einen Faden vom Punkte F an, nach und nach vom Umfange des Rades ab, und nehme jedesmal auf dem abgewickelten Stücke S vom Punkte O an, wo es den Umfang verläßt, einen Theil $OM = c\,(1 - e^{-\frac{s}{c}})$ ab, so liegt M in der verlangten Curve FM des Zahnes.

§. 250.

Fig. 61. **Aufgabe.** Vom Umfange aeb der Welle eines Rades AoB hängt eine Last P herab, das in eine Schraube ompn eingreift; man sucht die Kraft V, die ihr am Endpunkte D der Kurbel GD das Gleichgewicht halt.

Aufl. 1) Es sey der Halbmesser AC des Rades $= R$, der Halbmesser aC der Welle $= r$, so ist der Last P am Umfange des Rades in O eine Kraft $\frac{Pr}{R}$ äquipollent (§. 193.).

2) Diese Kraft wirkt auf OC senkrecht, also nach OM, und da der Zahn die Schraubenfläche stets in einem Punkte berührt, der in OM hineinfällt, so übt die

Kraft auf den Schraubengang einen mit der Axe der Spindel parallelen Druck aus.

3) Wird also die Länge des Hebelarmes GD = f gesetzt, so hat man: (§. 247.) $2\pi Vf = \frac{Phr}{R}$, folglich

$$V = \frac{Phr}{2\pi Rf}$$

Exempel. Es sey R = 36 Zoll, r = 3 Zoll, h = 1 Zoll, f = 15 Zoll, P = 27000 ℔, so wird:

log. 2Rf = 3,0334238
log. π = 0,4971499
log 2πRf = 3,5305737
Ferner: log Phr = 4,9084850
also: log V = 1,3779113
und V = 23,87324 ℔ = 23 ℔ 28 ℔.

Zusammengesetzte Schrauben.

§. 251.

Die Schraube ohne Ende kann auf mancherley Art mit andern einfachen Maschinen verbunden werden. Sie läßt sich selbst mit der Schraube der zweyten Art (§. 246.) wieder zusammensetzen, und beyde geben in Verbindung eine Maschine, die sehr brauchbar ist, große Lasten damit auf eine geringe Höhe, z. B. auf einen Wagen zu heben, daher sie auch vom Hrn. Prof. Burja, der sie in seiner Statik anführt, die Wagenwinde genannt wird. Ihre Einrichtung ist folgende:

1) Die stehende Schraube hat mit dem beweglichen

Prisma, worin die hohlen Schraubengänge liegen, vertikale Stellung.

2) Die zu hebende Last wird in ein Behältniß gepackt, das auf der obern Fläche GI des Prisma's befestigt ist.

3) Unterhalb an der Spindel der Schraube liegt ein horizontales Rad, dessen Zähne in eine Schraube ohne Ende eingreifen, die dann durch eine Kurbel gedrehet wird.

§. 252.

Es sey die Höhe des Schraubenganges der ersteren Schraube $= g$, der Halbmesser des Rades $= a$, die auf GI ruhende Last $= P$, so ist dieser am Umfange des Rades die Kraft $\frac{gP}{2\pi a}$ äquipollent, die wir $= Q$ setzen wollen.

Ferner sey die Kraft an der Kurbel $= V$, die Länge der Kurbel $= f$, die Höhe des Schraubenganges der Schraube ohne Ende $= h$; so hat man für das Gleichgewicht der beyden Kräfte Q und V die Gleichung: $2\pi Vf = Qh$. Darin den Werth für Q substituirt, giebt $2\pi Vf = \frac{ghP}{2\pi a}$, oder $V = \frac{ghP}{4\pi^2 af}$.

Exempel. Es sey wieder, wie vorhin $f = 15$ Zoll, g und h beyde $= 1$ Zoll; außerdem $a = 6$ Zoll. Man setze die Kraft $V = 24$ ℔; wie viel Last wird man mit dieser im Gleichgewichte erhalten können?

Man erhält hier $\log 4af = 2,5563025$

$\log \pi^2 = 0,9942997$

$\log 4\pi^2af = 3,5506022$

dazu: $\log V = 1,3802112$

giebt $\log P = 4,9308134$

und $P = 85273,36$ ℔.

§. 253.

Eine andere sehr sinnreiche Zusammensetzung zw gewöhnlichen Schrauben, die auf eine ähnliche Art einander greifen, beschreibt Hunter in den Phil. tra act. Vol. 71. part. 1. pag. 58. Sie besteht in gendem:

Fig. 70. 1) Die größere Schraube CDA geht be durch eine unbewegliche Schraubenmutter, und enth inwendig selbst wieder eine Schraubenmutter für kleinere Schraube cda, die zwischen den festen Sch wänden mp und nq auf und niedersteigen, aber nicht drehen kann.

2) Wenn daher auf die obere Fläche o ein Gew gelegt wird, so drückt dies die kleinere Schraube ge die größere, und wirkt dadurch auf letztere zwiefach

3) In sofern nemlich dieser Druck auf ihre nern Schraubengänge geschieht, wird sie zu einer U drehung von f nach g sollicitirt; und in sofern ders auf den ganzen Schraubenkörper geht, der dadu gegen die in GH liegenden Schraubengänge gedr wird, bekommt sie ein Bestreben, sich von g nac zu drehen.

4) Be

4) Beyde Umdrehungen geſchehen nach entgegengeſetzter Richtung, und heben ſich alſo zum Theil einander auf.

§. 254.

Aufgabe. Auf die obere Schraube drückt eine Laſt P, der eine Kraft V am Hebelarme EC das Gleichgewicht hält; man fragt nach dem Verhältniſſe von V zu P.

Aufl. 1) Es ſey die Höhe des Schraubenganges bey der größern Schraube $= g$, bey der kleinern $= h$, ſo hat die Laſt P, in ſofern ſie die größere Schraube gegen die in GH liegenden Schraubengänge drückt, das Moment $\frac{Pg}{2\pi}$, (§. 243. 9.) ſie um ihre Axe nach der Seite gf zu drehen; und in ſofern ſie die kleinere Schraube gegen ihre innere Schraubengänge drückt, das entgegengeſetzte Moment $\frac{Ph}{2\pi}$, weil ſie dadurch eine Umdrehung derſelben nach der Seite fg zu bewirken ſucht.

2) Alſo bleibt ihr das Moment $\frac{P(g-h)}{2\pi}$ nach erſterer Seite zu übrig. Dieſem muß nun das entgegengeſetzte Moment Vf der Kraft V gleich ſeyn, daher hat man:

$$Vf = \frac{P(g-h)}{2\pi} \text{ oder}$$

$$2\pi Vf = P(g-h).$$

Exempel. Es ſey $g = \frac{1}{3}$ Zoll, $h = \frac{1}{4}$ Zoll, $f = 15$ Zoll, die Kraft $V = 24$ ℔, ſo wird $g - h = \frac{1}{12}$ Zoll, alſo

$$\log \frac{2f}{g-h} = \log 360 = 2{,}5563025$$

dazu: $\log \pi = 0{,}4971499$

und $\log V = 1{,}3802112$

giebt $\log P = 4{,}4336636$

und $P = 27143{,}362$ ℔.

Achtes Kapitel.

Vom Keile.

§. 255.

Der Keil iſt ein dreyſeitiges Prisma, von dem zwey Seitenflächen einen ſpitzen Winkel einſchließen. Sein Gebrauch beſteht darinn, daß man ihn zwiſchen Flächen, die durch irgend eine Kraft gegeneinander gepreßt ſind, mit der ſcharfen Kante nach und nach eindringen läßt, und ſie dadurch auseinander treibt. Das Hineintreiben geſchieht entweder durch Druck oder durch wiederholte Schläge auf die dritte Seitenfläche, die man den **Rücken** des Keiles nennt.

§. 256.

Fig. 71. Es ſey der Keil ACB zwiſchen die beyden Flä-

n EO und FO eingezwängt, die ein Beſtreben ha-
n, aneinander zu treten (wie z. B. in dem Falle,
nn EOF der Spalt eines feſten Körpers iſt); ſo lei-
t von ihnen der Keil an den Stellen E und F, wo er
t ihnen in Berührung iſt, einen Druck, ſenkrecht auf
e Seitenflächen AC und BC. Es mögen nemlich
Kräfte, die die Flächen EO, FO gegeneinander trei-
n; nach Richtungen wirken, wonach ſie wollen, ſo
ſen ſie ſich doch allemal nach EG und FG, den Per-
ndikeln auf AC und BC, und nach EC, FC, parallel
t den Seitenflächen, zerlegen, von denen erſtere bey-
n nur allein wirkſam ſind.

Das in der Figur gezeichnete Profil gehe durch
Mittelpunkte dieſer Drucke E und F, ſo ſind EG,
ihre mittlere Richtungen, die ſich irgendwo in G
rchſchneiden mögen. Aus beyden entſpringt eine
ſammengeſetzte Kraft nach irgend einer Richtung GD,
allemal aufwärts geht, und folglich den Keil aus
m Zwiſchenraume EOF herauszutreiben ſtrebt; ſoll
her dies verhindert werden, ſo muß auf den Rücken
s Keiles eine eben ſo große Kraft nach entgegengeſetz-
Richtung DG wirken.

§. 257.

Aufgabe. Die Umſtände zu beſtimmen, unter
nen der mittlere Druck von Seiten des Widerſtandes
uf den Rücken des Keiles ſenkrecht gerichtet iſt.

Aufl. 1) Es ſey der Druck nach EGr = M, der
nach FGu = N; man zerlege erſtere in eine Kraft nach

GD, ſenkrecht auf AB, und in eine nach Gp, parallel AB, ſo iſt jene = M Cos DGr, dieſe = M Sin DGr.

2) Da im Vierecke AEGD die Winkel bey E und D rechte Winkel ſind, ſo iſt EGD + EAD = 180° folglich DGr = EAD; ſetzt man alſo den Winkel bey A = α, ſo wird von jenen beyden Kräften, die nach GD = M Cos α, und die nach Gp = M Sin α.

3) Auf gleiche Art zerfällt der Druck N, wenn der Winkel bey B = β geſetzt wird, in eine Kraft nach GD = N Cos β, und in eine nach Gq, parallel AB = N Sin β.

4) Soll daher aus den Kräften M und N eine einzige Kraft nach GD entſpringen, ſo müſſen die beyden Seitenkräfte nach Gp und Gq ſich heben, folglich hat man: M Sin α = N Sin β.

§. 258.

Folgerung. 1. Es ſey P die Kraft, die unter dieſen Umſtänden den Kräften M und N das Gleichgewicht hält, ſo bekommt man (2. 3.) P = M Cos α + N Cos β. Darin für N ſeinen Werth $\frac{M \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta}$ geſetzt giebt $P = \frac{M \text{ Cos } \alpha \text{ Sin } \beta + M \text{ Cos } \beta \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \beta} = \frac{M \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \beta} = \frac{N \text{ Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \alpha}$.

2. Sind M und N bloß Widerſtandskräfte, d nur das weitere Eindringen des Keiles zwiſchen die Fl

chen EO und FO verhindern, so wird gegenseitig: $M = \frac{P \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$, $N = \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$

3. Wenn das Dreyeck ACB gleichschenklig, oder $AC = BC$ ist, so ist $\alpha = \beta$, folglich wird alsdann $M = N = \frac{P \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} 2\alpha} = \frac{P}{2 \operatorname{Cos} \alpha}$

3. Man setze den Winkel bey $C = \gamma$, so hat man: $\gamma = 180° - 2\alpha$, also $\alpha = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, und daher $M = N = \frac{P}{2 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\gamma}$. Je spitzer also der Winkel ACB ist, desto größer ist der Seitendruck auf die anliegenden Flächen, folglich desto weniger Kraft erforderlich, um sie zum Weichen zu bringen.

5. Liegen die Berührungspunkte E und F in einer Linie EF, die mit AB parallel ist, so ist $AE = BF$, folglich sind die rechtwinkligen Dreyecke AEG und BFG kongruent, also $AG = BG$; daher ist das Dreyeck AGB gleichschenklich, folglich $AD = BD$. Die Kraft P muß also in diesem Falle auf die Mitte des Rückens wirken.

Vom Drucke der Gewölbe gegen ihre Widerlagen.

§. 259.

Eine der nutzbarsten Anwendungen findet unstreitig die Theorie des Keiles bey den Gewölben. Jedem, der nur irgend ein Gewölbe mit einiger Aufmerksamkeit

betrachtet hat, muß von ſelbſt dabey einfallen, daß
einzelnen Wölbſteine, als vielförmige Maſſen, auch
Keile aufeinander wirken, und durch den Seitendru
den ſie gegen einander ausüben, dem Gewölbe jene
ſtigkeit ertheilen, die es vor andern Werken der Ba
kunſt ſo ſehr auszeichnet. Freilich haben nähere Unt
ſuchungen über dieſen Gegenſtand gezeigt, daß ni
bey jeder Form des Gewölbebogens ein vollkommen
Gleichgewicht der Wölbſteine unter ſich ſtatt finde, o
dies thut auch eigentlich zur Sache nichts; es kom
nur darauf an, ob die Widerlagen, auf die ſich
ganze Maſſe ſtützt, feſt genug ſtehen, um der Gew
womit die Wölbſteine einander ſeitwärts zurück zu dr
gen ſtreben, gehörigen Widerſtand leiſten zu kön
Hiervon ſoll in den folgenden §§ gehandelt werden.

§. 260.

Fig. 72. **Aufgabe.** Den Druck zu beſtimmen, den
Wölbſtein IEie eines Gewölbebogens AIB gegen
anliegenden Seitenflächen IE und ie ausübt.

Auflöſ. 1) Es ſey w das Gewicht des Wölbſte
das auf ſeinen Schwerpunkt o nach der Vertikale
wirkt. Man fälle aus o auf die Fugen ie und IE
Perpendikel op und oq und nenne p und q die Kr
worin das Gewicht w nach dieſen Richtungen zerfä
ſo hat man (§. 49.)

$$p \operatorname{Sin} nop = q \operatorname{Sin} noq$$
$$q \operatorname{Sin} poq = w \operatorname{Sin} nop$$

2) Setzt man den Winkel Eqv und opu, de

ie Fugenſchnitte IE, ie mit der Vertikale machen = I und I', ſo wird nop = opu = 90° — I', noq = qv = 90° + I, poq = 180° — (I' — I) folglich:

p Cos I' = q Cos I

q Sin (I' — I) = w Cos I'.

3) Daher wird $q = \frac{w \text{ Cos } I'}{\text{Sin } (I' - I)}$, $p = \frac{q \text{ Cos } I}{\text{Cos } I'} = \frac{w \text{ Cos } I}{\text{Sin } (I' - I)}$.

§. 261.

Man nenne w' das Gewicht des zunächſt darunter liegenden Wölbſteins ie i'e'; I'' den Winkel, den die Fuge i'e' mit der Vertikale macht, p' und q' den ſenkrechten Druck auf die Fuge i'e' und ie, ſo hat man auf gleiche Art:

$p' = \frac{w' \text{ Cos } I'}{\text{Sin } (I'' - I')}$, $q' = \frac{w' \text{ Cos } I''}{\text{Sin } (I'' - I')}$.

Von dieſen iſt letzterer dem Drucke p entgegengeſetzt, und hebt ihn alſo zum Theil auf; daher iſt die Kraft, womit der obere Wölbſtein IEie den untern ie'i'e' nach Richtung op fortzudrängen ſtrebt, = p — q' = $\frac{w \text{ Cos } I}{\text{Sin } (I' - I)} - \frac{w' \text{ Cos } I''}{\text{Sin } (I'' - I')}$.

§. 262.

Man kann den ganzen Gewölbebogen als eine Zuſammenſetzung aus einen unendlichen Menge einzelner Theile anſehen: denn offenbar leidet darunter ſeine Feſtigkeit nicht, ſondern gewinnt vielmehr, wenn am

Ende von den unendlich vielen Fugenſchnitten nur einige wirklich vorhanden ſind. Verbindet man mit dieſer Vorausſetzung noch die zweyte, daß die Fugenſchnitte auf dem innern Bogen AIB ſenkrecht ſtehen oder Normalen deſſelben ſeyn ſollen, ſo ändern ſich die vorigen Reſultate folgendermaßen ab:

Fig. 73. 1) Der Winkel mIr, den die Normale Ir mit der Vertikale Im macht, iſt = I; der Winkel I' = I + dI; I'' = I + 2dI + d²I. Nimmt man daher in der Vertikale, die durch den Scheitel der Kurve AIB geht, die Abſciſſe AP = x, ſetzt die dazu gehörige Ordinate PI = y, und das Element des Bogens Ii = ds; ſo wird Sin I = Sin mIl = $\frac{dx}{ds}$, Cos I = $\frac{dy}{ds}$ und der Krümmungshalbmeſſer bey I, den wir r nennen wollen, = $\frac{ds}{dI}$.

Fig. 72. 2) Setzt man ferner die Länge des Fugenſchnittes IE = z, ſo wird

Ii : Ee = r : r + z, alſo

$$Ee = (1 + \frac{z}{r})\, ds,$$

folglich das arithmetiſche Mittel zwiſchen Ii und Ee = $(1 + \frac{z}{2r})\, ds$, und der Inhalt des Trapeziums IEie = $(1 + \frac{z}{2r})\, zds = (1 + \frac{zdI}{2ds})\, zds = zds + \frac{1}{2} z^2 d$

3) Da es geſtattet iſt, die ganze Rechnung auf das Profil des Gewölbes zu beziehen, und das ſpecifi

ſche Gewicht der Gewölbmaſſe = 1 zu ſetzen, ſo drückt letztere Formel zugleich das Gewicht w des unendlich ſchmalen Wölbſteins IEie aus. Ferner iſt $w' = w + dw$, und, wenn man ds als beſtändig annimmt: $dw = dzds + zdzdI + \frac{1}{2} z\, d^2I$.

4) Demnach wird der Druck $p = \frac{w \operatorname{Cos} I}{\operatorname{Sin} dI}$, $= \frac{w \operatorname{Cos} I}{dI}$, und der ihm entgegengeſetzte $q' = \frac{w' \operatorname{Cos}(I + 2dI)}{\operatorname{Sin}(dI + d^2I)} = \frac{w'(\operatorname{Cos} I - 2 \operatorname{Sin} IdI)}{dI + d^2I}$ $= \frac{w}{dI}(\operatorname{Cos} I - 2 \operatorname{Sin} IdI - \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI}) + \frac{\operatorname{Cos} Idw}{dI}$; alſo der Ueberſchuß des erſtern über letztern, den wir w nennen wollen, $= 2w \operatorname{Sin} I + w \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI^2} - \operatorname{Cos} I . \frac{dw}{dI}$.

5) Setzt man nun hierin für w und dw ihre Werthe, ſo erhält man:

$$w = (zds + \tfrac{1}{2} z^2 dI)\ (2 \operatorname{Sin} I + \frac{\operatorname{Cos} Id^2I}{dI^2}) - \frac{\operatorname{Cos} Idzds}{dI} z \operatorname{Cos} Idz - \tfrac{1}{2} z^2 \operatorname{Cos} I . \frac{d^2I}{dI^2}$$

$$= 2z \operatorname{Sin} Ids + \frac{zds \operatorname{Cos} Id^2I}{dI^2} + z^2 \operatorname{Sin} IdI - \frac{\operatorname{Cos} Idzds}{dI} - z \operatorname{Cos} Idz$$

6) Da $d\left(\frac{\cos I}{dI}\right) = -\sin I - \frac{\cos I d^2 I}{dI^2}$, so wird

$$\frac{\cos I d^2 I}{dI^2} = -d\left(\frac{\cos I}{dI}\right) - \sin I, \text{ also}$$

$$\omega = z \sin I ds - zds\, d\left(\frac{\cos I}{dI}\right) + z^2 Si$$

$$IdI - \frac{\cos I dz ds}{dI} - z \cos I dz$$

$$= zdx - zd\left(\frac{rdy}{ds}\right) - z^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right) -$$

$$\frac{(r+z)\, dydz}{ds}$$

§. 263.

Aufgabe. Die Gestalt und Dimension des i
nern Gewölbbogens AIB ist gegeben, nebst der Dic
IE des Gewölbes für jeden Punkt I; man fragt, w
viel Breite KF der Widerlage BFKA gegeben werd
müsse, damit sie hinlängliche Stabilität bekomme, u
den Seitendruck des Gewölbes aushalten zu können.

Auff. 1) Man ziehe aus dem Schwerpunkte
des Elementes IEie die beyden Linien oI und oN
erstere durch den Anfang des Bogens Ii, letztere pe
tikal, oder parallel mit ADL; so hat man $oI = \sqrt{(qI^2 + oq^2)}$, und da oq unendlich klein ist, $oI = q$

2) Nun kann man mit Sicherheit den Punkt
in der Mitte von IE annehmen; setzt man also IE =
so wird $Io = \frac{1}{2}z$, und, weil der Winkel qIo unendli
klein, also nIo unendlich wenig von $nIq = 90° -$
verschieden ist: $on = \frac{1}{2}z \cos I$, $nI = \frac{1}{2}z \sin I$.

3) Es sey des Gewölbes Höhe AD = a, seine halbe Weite oder Spannung BD = b, die Höhe der Widerlage BF = h, seine gesuchte Breite KF = f; so wird nN = PD = a − x, also oN = a − x + ½z Cos I. Ferner ZL = nP = y + ½z Sin I, folglich die Entfernung VZ = b + f − y − ½z Sin I, welche v heißen soll.

4) Man zerlege die Kraft ω, womit das Element Ii auf das nächstfolgende nach der Richtung op wirkt, in eine horizontale = ω Cos nIi = ω Cos I, und in eine vertikale = ω Sin I. Erstere hat das Moment ωu Cos I = ω Cos I (a + h − x + ½z Cos I) die Widerlage um den Punkt K zu drehen, und sie so nach außen zu umzustürzen; letztere hat das entgegengesetzte Umdrehungsmoment ωv Sin I = ω Sin I (b + f − y − ½z Sin I): daher bleibt dem Elemente w noch das Moment ω (u Cos I − v Sin I) übrig, die Widerlage auswärts hin um K zu drehen.

5) Ein solches Moment hat jedes andere Element des Gewölbes; wenn man daher alle diese Momente summirt, so bekommt man für das Moment des ganzen Bogens AIB das Integral ∫ω (u Cos I − v Sin I), das nach geschehenem Kalkul von x = o, bis x = a genommen werden muß.

6) Das letzte Element bey B übt den Druck p unmittelbar auf die Widerlage aus, also fällt der entgegengesetzte Druck q' hier weg; woraus erhellet, daß das Moment dieses Elementes besonders in Rechnung gebracht werden müsse. Man setze den Winkel I für die

Fuge Bb $= \zeta$, die Länge dieses Fugenschnittes $=$ den Krümmungshalbmesser des Bogens an dieser Stel $= u$, so wird $w = eds + \frac{1}{2}e^2 dI$, und $p = \frac{w \operatorname{Cos}}{dI}$ (§. 262. 4.) $= (eu + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta$.

7) Dieser Druck zerfällt in einen horizontalen: $(eu + \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta^2$, und in einen vertikalen $= (eu - \frac{1}{2}e^2) \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$, wovon ersterer das Moment $(eu - \frac{1}{2}e^2)$ h $\operatorname{Cos} \zeta^2$, letzterer das entgegengesetzte Mome $(eu + \frac{1}{2}e^2)$ f $\operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta$ hat. Beyder Unterschied $= (eu + \frac{1}{2}e^2)(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Sin} \zeta \operatorname{Cos} \zeta)$, der zu vorhergehenden Momente (5) hinzukommt.

8) Da die Widerlage nur um ein geringes Stü von dem Rechtecke abweicht, dessen Höhe $=$ h ist, kann man ihren Schwerpunkt G in der Linie GO a nehmen, die ihre Basis uF halbirt, und ihren Inh $=$ hf setzen. Nennt man also m das specifische G wicht des Mauerwerks, woraus sie besteht, so ist i Gewicht $=$ mhf, und das Moment desselben, sie um nach innen zu zu drehen, $= KO . mhf = \frac{1}{2} mhf^2$.

9) Wofern nun die Widerlage vor dem Wank geschützt seyn soll, muß dieses Moment dem vorig gleich seyn, woraus folgende Gleichung entsteht:

$(eu + \frac{1}{2}e^2)(h \operatorname{Cos} \zeta^2 - f \operatorname{Cos} \zeta \operatorname{Sin} \zeta) +$
$(u \operatorname{Cos} I - v \operatorname{Sin} I) = \frac{1}{2} mhf^2$

in der die unbekannte Größe f nur bis auf den zweyt Grad steigt.

§. 264.

Wenn der innere und äußere Gewölbbogen concentrische Halbkreise sind, deren Halbmesser = a und a + e, so hat man:

1) r = a, b = a, z = t, und ζ = 90°, also Cos ζ = 0; daher fällt aus jener Gleichung das erstere Glied ganz weg, und man behält bloß:

$$\int \omega \operatorname{Cos} I \left(h + a - x + \frac{edy}{2ds}\right) - \int \omega \operatorname{Sin} I \left(t + a - y - \frac{edx}{ds}\right) = \tfrac{1}{2} mhf^2.$$

2) Da ferner für den Kreis $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$, und $\frac{dy}{ds} = \frac{a - x}{a}$ ist, (§. 89.) so wird

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{dx}{a} \text{ und}$$

$$d\left(\frac{ydy}{ds}\right) = ad\left(\frac{dy}{ds}\right) = -dx; \text{ also}$$

$$\omega = 2edx + \frac{e^2 dx}{a} = \frac{(2ae + e^2)\,dx}{a}, \text{ folglich:}$$

$$\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\omega dx}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\,ydx}{a^2}, \text{ und}$$

$$\omega \operatorname{Cos} I = \frac{\omega dy}{ds} = \frac{(2ae + e^2)\,(a - x)\,dx}{a^2}$$

3) Man setze $a - x = t$; $\frac{2a + e}{a} = \lambda$; so wird

$dx = -dt$, und $\omega \operatorname{Cos} I = -\frac{\lambda e t dt}{a}$; ferner

$u = h + t + \frac{et}{2a} = h + \frac{1}{2}\lambda t$, alſo

$\omega u \operatorname{Cos} I = -\frac{\lambda e h t dt}{a} - \frac{\lambda^2 e t\, dt}{2a}$, und

$\int \omega u \operatorname{Cos} I = C - \frac{\lambda e h t^2}{2a} - \frac{\lambda^2 e t^3}{6a}$

4) Da dies Integral für $x = o$, oder $t = a$ verſchwinden ſoll, ſo wird $c = \frac{\lambda e h a^2}{2a} + \frac{\lambda^2 e a^3}{6a} = \frac{1}{2}\lambda e h a + \frac{1}{6}\lambda^2 e a^2$, dies iſt zugleich ſein vollſtändiger Werth, weil für $x = a$, $t = o$ wird.

5) Ferner hat man $\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e y dx}{a}$, $v = f + a - y - \frac{ey}{2a} = f + a - \frac{1}{2}\lambda y$, alſo $y\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e (f+a) y dx}{a} - \frac{\lambda^2 e y^2 dx}{2a}$

6) Nun iſt $\int y dx$, für $x = a$, $=$ dem Inhalte des Quadranten, alſo $= \frac{1}{4}\pi a^2$; daher $\frac{\lambda e (f+a)}{a} \int y dx = \frac{1}{4}\pi\lambda e (af + a)$, und

7) $\int y^2 dx = \int (2ax - x^2)\, dx = ax^2 - \frac{1}{3}x^3$ welches für $x = a$ den Werth $\frac{2}{3}a^3$ bekommt. Alſo wird $\frac{\lambda^2 e}{2a}\int y^2 dx = \frac{1}{3}\lambda^2 e a^2$, folglich:

$\int v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{1}{4}\pi\lambda e (af + a^2) - \frac{1}{3}\lambda^2 e a^2$.

8) Diese gefundenen Werthe der beyden Integrale in die Gleichung (1) substituirt, geben:

$\frac{1}{2}mhf^2 + \frac{1}{4}\pi\lambda eaf - \frac{1}{2}\lambda e[ah + (\lambda - \frac{1}{2}\pi)a^2] = o$

oder wenn man

$\frac{(2ae + e^2)\pi}{mh} = A$ und

$\frac{2ae + e^2}{mh} \cdot [h + e + (2 - \frac{1}{4}\pi)a] = B$ setzt,

$f^2 + Af + B = o$, woraus

$f = -\frac{1}{2}A + \sqrt{(B + \frac{1}{4}A^2)}$ wird.

Exempel. Es wird $a = 10$ Fuß, $e = 1\frac{1}{2}$ Fuß, $h = 10$ Fuß, und da bey m das specifische Gewicht der Gewölbmasse als Einheit zum Grunde liegt, so sey hier auch $m = 1$.

Demnach wird $2ae + e^2 = 40{,}027778$

$\log(2ae + e^2) = 1{,}6023014$

$\log \pi = 0{,}4971499$

$\log(2ae + e^2)\pi = 2{,}0995113$

$(2ae + e^2)\pi = 125{,}75005$

und $A = 6{,}287647$.

Ferner $(2 - \frac{1}{2}\pi)a = 4{,}292037$

$h + e = 11{,}833333$

$h + e + (2 - \frac{1}{2}\pi)a = 16{,}125370$

wovon der Log: $= 1{,}2075097$

hierzu $l(2ae + e^2) = 1{,}6022614$

giebt: $2{,}8098711$

wozu die Zahl: $645{,}46274$ gehört.

Daher wird $B = 64{,}546274$ und

$f = 5{,}4835 = 5$ Fuß $5\frac{9}{10}$ Zoll.

Anmerk. Herr Langsdorf trägt in seiner Hydraulik pag. 259 eine andere Methode vor, die erforderliche Breite der Widerlagen für kreisförmige Gewölbe zu finden, die im gegenwärtigen Falle $f = 5{,}026$ Fuß giebt. Es ist nicht möglich, eine Vergleichung zwischen seiner Formel und der meinigen anzustellen, weil sie Größen enthält, die man zuvor durch eine Art von Falsi bestimmen muß; aber auf kleinere Resultate führt sie gewiß jedesmal, da sie auf der Voraussetzung beruhet, daß man den halben Gewölbbogen AIB als eine Zusammensetzung aus zweyen soliden Stücken ansehen könne.

§. 265.

Die gedruckten Bogen werden jetzt gewöhnlich aus dreyen oder mehrern Kreisbogen, die verschiedene Halbmesser haben, zusammengesetzt *). Bey dieser Verzeichnungsart herrscht sehr viel Willkührliches, und es ist gewiß nicht leicht, sondern erfordert ungemein viel praktischen Scharfblick, sie am bequemsten und vortheilhaftesten einzurichten; hat man aber bereits eine bestimmte Konstruktionsmethode erwählt, und in der Ausführung bewährt gefunden, so ist für sie die Berechnung der Breite der Widerlagen nur umständlicher, aber durchaus nicht verwickelter, als beym einfachen Halbkreise. Zur nähern Erläuterung dieses Kalkuls mag folgender besondere Fall dienen:

§. 266.

Fig. 74. Der gedruckte Bogen BAb bestehe aus dreyen Kreisbogen: dem mittlern IAi, der durch die Scheitellini

*) S. Müller's analytisch-praktische Abhandlung über die Verzeichnung großer gedruckter Bogen. Göttingen 1792.

linie AD halbirt wird, und den Seitenbogen IB, ib, die per Symmetrie gemäß kongruent sind, so ergeben sich unmittelbar diese Folgen:

1) Der Mittelpunkt O des Bogens IAi muß in der Verlängerung der Vertikale AD angenommen werden; daher schneiden die Halbmesser IO, iO die Basis Bb in Punkten C und c, die von D, folglich auch von B und b gleich weit abstehen.

2) Die Linie IO ist eine gemeinschaftliche Normale der Bogen IA und IB, und muß also zugleich durch den Mittelpunkt des letztern gehen. Soll sich nun dieser Bogen über BD Anfangs senkrecht erheben, so muß sein Mittelpunkt auch in BD, folglich in den Durchschnitt beyder Linien IO und BD, d. i. in C, fallen. Eben dies gilt auf der andern Seite vom Bogen bi.

3) Es sey nun die Höhe des Gewölbes AD $= a$, die halbe Weite BD $= b$; ferner die Amplitude des obern Bogens Ii $= 2\alpha$, die von BI oder bi $= \beta$, der Halbmesser AO zu erstern $= g$, der zu letztern $= \varkappa$; so wird, wenn man durch I und i die Sehne Ii, und auf BD das Perpendikel Iπ zieht:

$A\omega = g\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)$, $I\pi = \varkappa\,\mathrm{Sin}\,\beta$, also

$g(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha) + \varkappa\,\mathrm{Sin}\,\beta = a.$

4) Ferner $I\omega = g\,\mathrm{Sin}\,\alpha$, $B\pi = \varkappa\,(1 - \mathrm{Cos}\,\beta)$, folglich:

$$g\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \varkappa\,(1 - \mathrm{Cos}\,\beta) = b.$$

5) Beyde Gleichungen verbunden, geben:

$$g = \frac{b \operatorname{Sin}\beta - a(1 - \operatorname{Cos}\beta)}{\operatorname{Sin} a \operatorname{Sin}\beta - (1 - \operatorname{Cos}\alpha)(1 - \operatorname{Cos}\beta)} \text{ und}$$

$$\varkappa = \frac{a \operatorname{Sin}\alpha - b(1 - \operatorname{Cos}\alpha)}{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta - (1 - \operatorname{Cos}\alpha)(1 - \operatorname{Cos}\beta)}$$

6) Da überhaupt $\operatorname{Sin}\eta = 2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\eta \cdot \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\eta$, und $1 - \operatorname{Cos}\eta = 2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\eta^2$ iſt, ſo laſſen ſich die eben gefundenen Ausdrücke noch unter folgende Form bringen:

$$g = \frac{b \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\beta - a \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta}{2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+\beta)}$$

$$\text{und: } \varkappa = \frac{a \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha - b \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\alpha}{2 \operatorname{Sin}\frac{1}{2}\beta \operatorname{Cos}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

Exempel. Es ſey $2\alpha = \beta = 60°$, ſo iſt $\operatorname{Sin}\alpha = \operatorname{Cos}\beta = \frac{1}{2}$, und $\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Sin}\beta = \sqrt{\frac{3}{4}}$; folglich wird in den erſtern Formeln für g und $\varkappa$ (5) der Nenner $= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, alſo:

$$g = \frac{b\sqrt{3} - a}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(b\sqrt{3} - a).(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3b - a + (b-a)\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{und } \varkappa = \frac{a - b(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = \frac{b + a - (b-a)\sqrt{3}}{2}$$

§. 267.

Aufgabe. Der äußere Bogen des Gewölbes ſey mit dem innern parallel, und letzterer auf die eben angezeigte Art konſtruirt; man ſucht die erforderliche Breite der Widerlagen.

Aufl. 1) Da der Bogen AIB aus zweyen unchartigen Theilen AI, IB beſteht, ſo muß man das tegral $\int (u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I)$ (§. 263. 5.) für n dieſer Theile beſonders berechnen, und nachher de Reſultate zuſammen addiren.

2) Nun hat man aus §. 264. zuvörderſt für den rn Bogen AI:

$$\omega \operatorname{Sin} I = \frac{(2ge + e^2)\, ydx}{g^2}$$

$$\omega \operatorname{Cos} I = \frac{(2ge + e^2)(g - x)\, dx}{g^2}$$

$$u = a + h - x + \frac{e(g - x)}{2g}$$

$$v = b + f - y - \frac{ey}{2g}$$

r, wenn man wieder $\frac{2g + e}{g} = \lambda$, und außerdem

$+ h + \frac{1}{2}e = c$ ſetzt; $\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda eydx}{g}$, $\omega \operatorname{Cos} I$

$(\lambda e - \frac{\lambda ex}{g})\, dx$, und $u = c - \frac{1}{2}\lambda x$, $v = b$

$f - \frac{1}{2}\lambda y$.

3) Daher wird $\int u\omega \operatorname{Cos} I = \lambda ecx -$

$\frac{\lambda ec + \lambda^2 eg}{4g}) x^2 + \frac{\lambda^2 ex}{6g}$, und für $I = 30°$, oder

$= g(1 - \operatorname{Cos} 30°) = \frac{1}{2}g(2 - \sqrt{3})$, der vollſtän-

e Werth dieſes Integrals $= \frac{1}{8}\lambda ecg + \frac{1}{48}\lambda^2 eg^2$

$- 3\sqrt{3})$.

4) Ferner $\int v\omega \operatorname{Sin} I = \frac{\lambda e (b+f)}{g} \int y dx - \frac{\lambda^2 e}{2g} \int y^2 dx$; $\int y dx$ = Sect. AOI $- \Delta FOI = \frac{1}{12}\pi g^2 - \frac{1}{8} g^2\sqrt{3} = \frac{1}{24} g^2 (2\pi - 3\sqrt{3})$; $\int y^2 dx = gx^2 - \frac{1}{3}x^3$, und für $x = \frac{1}{2}g (2 - \sqrt{3})$, $= \frac{1}{24} g^3 (16 - 9\sqrt{3})$; daher $\int v\omega \operatorname{Sin} I = 0{,}045293\, \lambda eg (b+f) - 0{,}008574\, \lambda^2 eg^2$, also das Moment:

$\int (u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I) = \frac{1}{8}\lambda egc - 0{,}045293\, \lambda eg (b+f) + 0{,}004487\, \lambda^2 eg^2$.

5) Da der untere Bogen IB von $I = 30°$ angeht, und bey $I = 90°$ endigt, so betrachte man ihn als ein Stück vom ganzen Quadranten, berechne den Werth des Integrals $\int (u\omega \operatorname{Cos} I - v\omega \operatorname{Sin} I$ für $I = 90°$, der M heißen mag, und subtrahire davon seinen Werth M′ für $I = 30°$; der Ueberrest $M - M'$ giebt alsdann das gesuchte Moment des Bogens IB.

6) Hierbey ist nun $u = \varkappa + h - x + \frac{e(\varkappa - x)}{2\varkappa}$, und $v = b + f - y - \frac{ey}{2\varkappa}$; setzt man also $\frac{2\varkappa + e}{\varkappa} = \lambda'$, und $\varkappa + h + \frac{1}{2}e = d$, so wird:

$M = \frac{1}{2}\lambda' eh\varkappa + \frac{1}{2}\lambda'^2 e\varkappa^2 - \frac{1}{4}\pi\lambda' e (f\varkappa + \varkappa^2)$ (§. 246. No. 4 und 7.) $M' = \frac{1}{8}\lambda' e\varkappa d - 0{,}045293\, \lambda' e\varkappa (\varkappa + f) + 0{,}004487\, \lambda'^2 e\varkappa^2$, (4.) folglich

$M - M' = \frac{1}{8}\lambda' e\varkappa (4h - d) + 0{,}495513\, \lambda'^2 e\varkappa^2 - 0{,}740105\, \lambda' e (\varkappa f + \varkappa^2)$.

7) Dies Moment zum vorhergehenden (4.) hinzu addirt, und

$\frac{2}{3}\lambda egc - 0{,}045293\ \lambda egb + 0{,}004487\ \lambda^2 eg^2 = A$,

$0{,}045293\ \lambda eg = C$

$\frac{1}{3}\lambda' ex\ (4h - d) + 0{,}495513\ \lambda'^2 ex^2 - 0{,}740105\ \lambda' ex^2 = B'$

$0{,}740105\ \lambda' ex = D$ gesetzt, giebt endlich folgende Gleichung:

$$f^2 + \frac{2(C+D)}{mh} \cdot f - \frac{2(A+B)}{mh} = o.$$

Exempel. Es sey $a = 20'$, $b = 30'$, $e = 1\frac{1}{4}'$, $h = 10'$, $m = 1$; so wird $g = 43{,}66025$ (§. 266.), $x = 16{,}33975$, $\lambda = 2{,}02863$, $\lambda' = 2{,}07650$, $c = 30{,}62500$, $4h - d = 13{,}03525$; $\frac{2}{3}\lambda egc = 423{,}824$; $0{,}004487\ \lambda^2 eg^2 = 43{,}999$, $C = 5{,}01453$; daher $A = 317{,}387$. Ferner $\frac{1}{3}\lambda' ex\ (4h - d) = 69{,}106$; $0{,}495513\ \lambda'^2 ex = 713{,}050$; $0{,}740105\ \lambda' ex^2 = 512{,}392$; $B = 269{,}264$, $D = 31{,}389$. Man erhält also:

$$f^2 + 7{,}281\ f - 117330 = o,$$

und daraus $f = 7{,}786$ Fuß.

Gewölbe mit Bekleidung.

§. 268.

Wenn der äußere Bogen des Gewölbes mit Mauerwerk bekleidet ist, oder sonst eine Last zu tragen hat, so läßt sich der Seitendruck der ganzen Masse gegen die Widerlagen nicht nach dem bloßen Gewichte der Wölbsteine schätzen; es bedarf also in diesem Falle der

vorher geführte Kalkul noch eine Korrektion, die auf folgende Art bestimmt werden kann:

Es sey 1) Man setzt die Höhe der Säule MEme, die auf dem Elemente Ee des äußern Bogens aEu ruhet = t, ihr Gewicht = σ. sie zerfällt dies in eine Kraft, σ tang I, nach der Horizontale ES, und in eine senkrecht auf Ee. = σ Sec. I.

2) Ersterer drückt unmittelbar gegen die Widerlage, und hat also das Umdrehungsmoment σu tang I.

3) Letztere bringt dadurch, daß sie auf den Rücken des Keiles Eeej senkrecht wirkt, einen Seitendruck auf die anliegenden Elemente hervor, der sich aus §. 258. bestimmen läßt. Da nemlich die Fugen IE, ie, wenn man sie sich bis zu ihrem Durchschnitte verlängert denkt, den Winkel dI miteinander machen, so hat man hier $\gamma = dI$, $P = \sigma$ Sec. I, also $M = N = \frac{\sigma \text{ Sec } I}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2} dI} = \frac{\sigma \text{ Sec } I}{dI}$.

4) Hiervon den entgegengesetzten Druck $\frac{\sigma' \text{ Sec } I'}{dI'}$ des folgenden Elementes subtrahirt, bleibt vom ersten der Theil $- d\left(\frac{\sigma \text{ Sec } I}{dI}\right)$ übrig, der auf die Widerlage wirkt. Wir wollen ihn ψ nennen.

5) Setzt man in §. 262. (2) $z = e$, so wird $Ee = \left(1 + \frac{e}{r}\right) ds$, folglich $Eu = Ee \text{ Cos } I =$

$1 + \frac{e}{r}$) Cos Ids; alſo der Inhalt von MEme $=$ $(1 + \frac{e}{r})$ t Cos Ids $= \frac{\sigma}{m}$. Daher $\frac{\sigma \text{ Sec } I}{dI} = mt(r+e)$, und $\psi = -mtdr - m(r+e)dt$.

6) Um ſo viel wird alſo die Kraft ω durch das Gewicht σ vermehrt; daher iſt jetzt das Umdrehungsmoment des Gewölbes $= \int(\omega + \psi)$ u Cos I $-$ $(\omega + \psi)$ v Sin I).

7) Zu dieſem kommt nun noch die Summe der Momente σu tang I (2), welche $= \int(1 + \frac{e}{r})$ mtu Sin Ids $= m\int(1 + \frac{e}{r})$ tudx iſt.

8) Dagegen iſt die Widerlage jetzt um das Stück Z höher als vorhin; ſetzt man dies $= 1$, ſo wird ihr Gewicht $= m(h+1)f$, und das Moment deſſelben $= \frac{1}{2}m(h+1)f^2$, wodurch folgende Gleichung entſteht:

$u\int(1 + \frac{e}{r})$ tudx $+ \int(\omega + \psi)$ (u Cos I $-$ v Sin I) $= \frac{1}{2}m(h+1)f^2$.

§. 269.

Es ſey der Gewölbbogen ein Halbkreis vom Halbmeſſer a, der Rücken OMZ geradlinigt und horizontal, und ſeine vertikale Höhe aO über dem Schlußſteine des Gewölbes $= g$, ſo wird $t = g + a + x - e$ Cos I $= g + e + x - \frac{e(a-x)}{a}$, oder wenn man $\frac{a+e}{a}$

Anmerk. Auſſer den hier betrachteten Tonnengewölben giebt es noch mancherley andere Gewölbarten, unter denen die ſogenannten Kuppelgewölbe (voutes en dôme) beſonders für die Statik ein ſehr wichtiger Gegenſtand ſind. Da bey dieſen die Berechnung des Seitendrucks auf eine ganz andere Art geführt werden muß, ſo geſtattet es der Zweck dieſes Buches nicht, mich näher darauf einzulaſſen. Man ziehe darüber folgende Schriftſteller zu Rathe:

Boſſut, Memoires de l'acad. de Paris, 1770.

Friſi, Opera Math. P. I. pag. 72. der Hrn. Boſſut's Formel in mehrern Punkten aber zum Theil falſch, abgeändert hat.

Salimbeni de gli archi e delle Volte. Verona 1787; ein in aller Hinſicht vortreffliches Werk.

Neuntes Kapitel.

Von der Cohäſion feſter Körper.

§. 270.

Es läßt ſich keine mechaniſche Operation gedenken, bey der nicht feſte Punkte ein weſentliches Erforderniß wären. So wird beym Hebel vorausgeſetzt, daß er eine feſte Unterlage habe; die Rolle und der Flaſchenzug werden an einen feſten Punkt aufgehängt, der ſowohl Kraft als Laſt, ſo wie die ganze Maſchine trägt; das Rad dreht ſich um ſeine Axe, die auf feſten Lagern ruhet u. ſ. w.

Dergleichen feſte Punkte kann man nun auf keine andere Art, als durch die unbeweglichen Theile der Ma-

ſchine erhalten, die ſich entweder geradezu, oder mittelbar gegen den Boden ſtützen, und auf ihn den Druck, den ſie auszuhalten haben, übertragen. Alſo muß man von dieſen genau anzugeben wiſſen, wie viel Widerſtand ſie zu leiſten vermögend ſind, damit man ihnen nicht mehr zu tragen überlaſſe, als ihre Feſtigkeit es geſtattet.

§. 271.

Die Feſtigkeit eines Körpers beruhet auf der Stärke des Zuſammenhanges oder der Cohäſionskraft ſeiner Theile, und läßt ſich alſo dadurch beſtimmen, daß man die Kraft ſucht, die erfordert wird, ſeine Theile von einander zu trennen. Da dies auf zweyerley Art geſchehen kann, ſo unterſcheidet man bey ihm abſolute und reſpektive Feſtigkeit von einander; erſtere beſteht in der Kraft, die man anwenden muß, ihn zu zerreißen; letztere in derjenigen, die nöthig iſt, um ihn zu zerbrechen. Eigentlich liegt dieſer Unterſchied nicht ſowohl im Körper ſelbſt, als vielmehr in der verſchiedenen Art, wie man die Trennung ſeiner Theile hervorzubringen ſucht.

Anmerk. Muſchenbrök hat bey einer Menge von Körpern Verſuche, ſowohl auf die eine als die andere Art, angeſtellt, und uns eine ſchätzbare Sammlung von Reſultaten hinterlaſſen. S. deſſen phyſ. experim. et geom. diſſert. pag. 421 u. f. wie auch deſſen introd. ad phil. nat. Tom. I. Cap. XXI.

Abſolute Feſtigkeit der Körper.

§. 272.

Um einen Körper zu zerreißen, müſſen auf ihn zwey

che und entgegengesetzte Kräfte angebracht werden; l man bloß eine einzige Kraft dazu anwenden, so ß der andere Theil des Körpers so befestigt seyn, daß em Zuge der Kraft nicht nachgeben kann. Muschen- ek befestigt den untern Theil des Körpers an den den, und bringt seinen obern Theil mit dem Arme es Wagebalken in Verbindung, der durch ein entge- gesetztes Gewicht aufwärts gezogen wird. Das ihere dieser Versuche findet man a. a. O. umständlich chrieben.

Wenn sonst keine Nebenumstände eintreten, die r Versuch ungewiß machen, so erfolgt die Trennung emal in einer Ebene, die auf die Richtung der Kraft krecht ist; z. B. beym vertikalen Zuge der Kraft in em horizontalen Querschnitte des Körpers.

§. 273.

Wenn der Körper durchaus gleichartig ist, so hän- n alle seine Theile mit gleicher Kraft unter einander sammen; also verhält sich dann seine absolute Festig- it wie die Menge der Theile, die beym Zerreißen des- ben von einander getrennt werden, folglich wie der uerschnitt, in dem die Trennung geschieht.

Daher ist die Cohäsion eines solchen Körpers für e Einheit der Fläche eine unveränderliche Größe, und nn also zum Maaße seiner Festigkeit dienen. Man se sie $= A$; die Cohäsion des Körpers für jeden an- n Querschnitt $Z = P$, so hat man: $P = AZ$.

§. 274.

Folgerung. 1. Iſt alſo von irgend einer Materie das Maaß ihrer Feſtigkeit bekannt, ſo läßt ſich daraus beſtimmen, wie viel Kraft angewandt werden muß, um ein aus ihr beſtehendes Prisma von gegebener Grundfläche ſeiner Länge nach zu zerreißen.

2. Für einen ſenkrechten Cylinder, deſſen Grundfläche einen Halbmeſſer $= f$ hat, iſt $Z = \pi f^2$, alſo $P = \pi A f^2$; daher verhalten ſich die abſoluten Feſtigkeiten zweyer Cylinder, die aus einerley Materie beſtehen, wie die Quadrate der Halbmeſſer ihrer Grundflächen.

3. Gegenſeitig kann man aus Verſuchen, durch die man zwey zuſammen gehörige Werthe von Z und P gefunden hat, den Werth von A beſtimmen.

Exempel. Nach Muſchenbrök zerriß ein Parallellapipedum von weißem Glaſe, 0,2 Zoll breit und dick, von 78 ℔; ein anderes, das 0,16 Zoll ins Gevierte hatte, von 50 ℔. Erſterer Verſuch gäbe alſo für 1 Quad. Zoll Fläche $A = 1950$ ℔; letzterer $A = 1953$ ℔.

Stärke des Holzes.

§. 275.

Die Feſtigkeit des Holzes läßt ſich nur einem beſtimmten Maaße unterwerfen, wenn man ſie im eingeſchränkten Sinne nimmt, und ſie bloß auf die Stärke

seiner Fibern bezieht, die durch den ganzen Stamm nach einerley Richtung, gewöhnlich parallel mit der centrischen Linie des Stammes, fortlaufen. Wiewohl auch diese wieder unter sich zusammenhängen, so ist doch der Grad dieser Cohäsion gröstentheils so verschieden, daß sich darüber nichts mit Gewißheit festsetzen läßt. Wenn also ohne weitern Zusatz von der Stärke des Holzes die Rede ist, so versteht man darunter allemal die Kraft, die erforderlich ist, es seiner Länge nach zu zerreißen.

§. 276.

Nach den Beobachtungen, die **Muschenbroek** in s. Introd. ad phil. nat. über die Stärke des Holzes mittheilt, haben die verschiedenen ringförmigen Schichten, aus denen das Holz besteht, nicht einerley Festigkeit; vom Marke an, das allemal am schwächsten ist, nimmt die Stärke der Fiber nach und nach zu, erreicht nahe am Splinte ihr Maximum, und leidet dann wieder bis zur Rinde eine Abnahme. Dagegen findet in der Festigkeit eines Stammes seiner Länge nach kein merklicher Unterschied statt, so daß man in der Regel den obern Theil desselben, und den untern, nahe an der Wurzel, als gleich stark annehmen kann. Obgleich der Boden auf die Festigkeit des Holzes einigen Einfluß hat, so stimmen doch die Versuche bey einerley Holzart ziemlich genau zusammen; nach Muschenbroek zerriß ein Parallelepipedum aus Tannenholz, wovon jede Seite 0,27 Zoll hielt, von 600 ℔; ein anderes, das

[illegible] Zoll ins Gevierte betrug von [illegible] ℔. Nimmt man hierbey den Quad. Zoll Rheinl. als Einheit an, so giebt ersterer Versuch A = 8230 ℔, letzterer A = [illegible] ℔; wozwischen offenbar wenig Verschiedenheit herrscht. Die Versuche, die er bey andern Holzarten angestellt hat, geben auf gleiche Art für das Maaß der Festigkeit

des Buchen- und Eichenholzes			[illegible]	℔ Cöln
des Eichenholzes	—	—	[illegible]	—
des Erlen- und Lindenholzes			[illegible]	—
des Ulmenholzes	—	—	[illegible]	—
des Fichtenholzes	—	—	[illegible]	—

Stärke der Seile.

§. [illegible].

Wenn man die Seile aus gestreckten und parallelen Fäden zusammensetzte, so würde sich wegen ihrer cylindrischen Form die Stärke derselben wie das Quadrat ihres Durchmessers verhalten (§. [illegible]); da sie aber aus gewundenen Fäden bestehen, so kann man nicht erwarten, daß dies Gesetz im strengsten Verstande bey ihnen statt finde. Indeß wichen doch die Resultate, die man durch Versuche gefunden, zumal bey Seilen, die über ½ Zoll Durchmesser haben, so wenig davon ab, daß man in der Ausübung diesen Unterschied außer Acht lassen, und jenes einfache Verhältniß ihrer Stärke als völlig richtig annehmen darf.

Nach Muſchenbroeks Angaben zerriß

ein Seil von 6 Pariſ. Lin. Diam. von 190 ℔

— — — 8 — — — — 330 —

— — — 10 — — — — 540 —

— — — 12 — — — — 750 —

— — — 15 — — — — 990 —

— — — 16 — — — — 1030 —

— — — 20 — — — — 2080 —

— — — 24 — — — — 3000 —

— — — 30 — — — — 4730 —

Hebt man unter dieſen Angaben die vierte aus, ſo erhält man für die Stärke eines Seiles, deſſen Durchmeſſer in pariſer Zollen = a iſt, 750 a^2 ℔. Hiermit ſtimmen die übrigen Angaben ſo genau überein, daß die geringen Abweichungen, da ſie überdies ſehr unregelmäßig ſind, auch wohl von zufälligen Nebenurſachen herrühren können.

§. 278.

Da die einzelnen Schnüre, aus denen ein Seil beſteht, durch das Drehen an ſich ſchon in eine Spannung verſetzt werden, ſo iſt es begreiflich, warum das Seil deſto weniger Stärke beſitzt, je enger ſeine Schnüre zuſammen gewunden ſind. Ein Seil, deſſen Schnüre um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge eingedreht waren, hielt nur 4321 ℔; ein anderes von eben der Dicke, bey dem die Verkürzung $\frac{1}{4}$ betrug, hielt 5187 ℔. Drey andere Seile von gleicher Dicke gaben folgende Reſultate:

[illegible] Stärke 4098 ℔

[illegible] 4850 —

[illegible] 5205 —

[illegible] einerley Verhältniß

[illegible] vorhergehender

[illegible] Windung be

[illegible]

lieren ſie zwar auch an Stärke, und zwar in eben
n Verhältniſſe, als durch die Näſſe: behalten aber
i anfänglichen Grad ihrer Stärke eine lange Zeit
durch, und ſind aus dieſem Grunde dauerhafter als
angepichten Seile, die durch öftere Abwechſelung
i Trockniß und Näſſe immer mehr an Haltbarkeit
nehmen.

§. 280.

Ein gewöhnliches gleich dickes Seil iſt gegen das
re Ende zu, nach Verhältniß der Laſt, die es da zu
gen hat, ſchwächer, als am untern Ende: denn jede
ner Stellen trägt nicht allein die unten angehängte
ſt, ſondern auch das Gewicht des ganzen Seilsſtücks,
s zwiſchen ihr und der Laſt enthalten iſt. Daher iſt
ſolches Seil allemal oben am meiſten der Gefahr
s Zerreißens ausgeſetzt. Soll dies nicht der Fall
n, ſo muß das Seil nach oben zu in dem Maaße
ker werden, als die Laſt durch das darunter liegende
eilſtück zunimmt. Da man, nach des Hrn. Baillet
Belloy *) Berichte, dergleichen coniſche Seile bey
r Marine in Frankreich wirklich verfertigt, und auf
n daſigen Schiffen gebraucht, ſo will ich die Gründe,
rauf ihre richtige Form beruhet, hier kurz auseinan-
r ſetzen.

§. 33. 1) Es ſey der Durchmeſſer des Seiles am
ntern Ende B = a, in der Entfernung BM = x

*) Journal de phyſique May 1788 pag. 375.

)a dies gegen G allemal gering ſeyn wird, ſo folgt, aß der Exponent $\frac{\pi\kappa a^2 x}{8G}$ ein kleiner Bruch ſey.

7) Bekanntlich iſt nun:

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{1.2} + \frac{Z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ovon hier füglich das dritte und die folgenden Glieder egbleiben können, ſo daß:

$$u = a\left(1 + \frac{\pi\kappa a^2 \pi}{8G}\right) = a + \frac{\pi\kappa a^3 x}{8G} \text{ wird.}$$

8) Weil ſich nach dieſer Formel die Zunahme der)icke wie die der Länge x verhält, ſo ſieht man, daß as Seil eine coniſche Form erhalte.

9) Es ſey l die Länge des ganzen Seiles, ſo wird, ir $x = l$, der Durchmeſſer des obern Endes $u = a + \frac{\kappa a^2 l}{8G}$, oder, wenn das Gewicht des Seiles, das die ange l, und allenthalben die Dicke a hätte, $= F$ ge- ßt wird: $u = a + \frac{aF}{2G}$. Das Verhältniß des untern Durchmeſſers zum obern wäre alſo wie $1 : 1 + \frac{F}{2G}$.

10) Die untere Dicke a hängt von G ab; man at nemlich, wenn man auf Näſſe Rückſicht nimmt, er das Seil ausgeſetzt ſeyn kann: $G = 0{,}742 \times 750a^2 = 556a^2$, alſo $a^2 = 0{,}0017985 \cdot G$, und $a = 0{,}00424\sqrt{G}$.

[illegible] Festigkeit.

§. 281.

[illegible] Endpunkte A und B eines [illegible] Kräfte wir- [illegible] gemeinschaftlichen Schwer- [illegible] haben die drey [illegible] Körper zu zerbrechen. In [illegible] die eine oder die andere dieser [illegible] Rückwirkung eines Widerstandes [illegible] der Körper zerbrechen, wenn [illegible] stützt, und an den Seiten mit Ge- [illegible] oder umgekehrt, wenn die Unterstü- [illegible] Endpunkten A und B geschieht, und di [illegible] wird; endlich kann man auch [illegible] ganz einschließen, und bloß den an [illegible] der Wirkung der Kraft überlassen. I [illegible] Fällen erfolgt der Bruch, wenn anders de [illegible] stark ist, im Punkte C, weil d [illegible] des Zerbrechens von beyden Seiten h [illegible] ist.

§. 282.

Aufgabe. Der Körper sey im Punkte C unt [illegible] seinen Endpunkt A drücke ein Gewicht, od [illegible] man fragt, wie groß diese se [illegible] Körper zu zerbrechen.

[illegible] das Profil des Querschn [illegible] der Bruch geschieht, so wirken [illegible]

Winkelhebel ACD Cohäsion und Last einander entgegen. Letztere strebt den Arm AC, und mit ihm die Fläche CD, um C zu drehen; erstere widersteht dieser Umdrehung nach einer auf CD senkrechten Richtung.

2) Man setze die Cohäsion für die Einheit der Fläche = A, CX = x, das Element der Fläche Xx = ds, so ist die nach Xξ dieser Stelle ziehende Kraft = Ads, und ihr Moment = Axds. Also die Summe aller Momente, oder das Moment der Cohäsion der ganzen Fläche = A∫xds.

3) Nennt man y die Breite der Höhe bey X, so ist ds = ydx, folglich jenes Moment auch = A∫yxdx.

4) Diesem muß nun das Moment der Kraft M gleich seyn; setzt man also CA = f, so hat man:

$$Mf = A\int yxdx.$$

5) Liegt der Körper horizontal, so kommt noch das Moment in Betracht, das der Arm AC durch sein eigenes Gewicht gegen C hat. Dies Gewicht ist, bey gleicher Dicke des Körpers, der Länge a proportional; also = fK, wenn das Gewicht für die Länge 1, = K gesetzt wird; folglich, da der Schwerpunkt des Armes in die Mitte von AC fällt, das Moment desselben = $\frac{1}{2}f^2K$. Man erhält also:

$$Mf + \tfrac{1}{2}Kf^2 = A\int yxdx.$$

§. 283.

Folgerung. 1. Ist der Querschnitt des Prisma's ein Rechteck, dessen Höhe = c, Breite = b, so ist y

[illegible] $= \frac{1}{2} bx^2$: darin x

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{2} Kf^2$ gegen Mf

[illegible] die Kraft,

[illegible] erprec

[illegible] die

[illegible] eine Breite:

[illegible] Kraft im Unter

[illegible] Prisma [illegible] ine

[illegible] das Integ

[illegible] Prisma [illegible] men

[illegible] $=$ [illegible] so w

[illegible]

[illegible] Das Prisma [illegible] den beyden En

[illegible] Kraft M auf d

[illegible] Fa

[illegible] das Prisma [illegible] soll?

[illegible] Kräfte, worin sie sich a

[illegible] $=$ M' und M'' so

[illegible] wenn man viel

[illegible] gerdem [illegible] ist: $M' = \frac{Ae^3}{l}$ u

[illegible] $M'' =$ [illegible]

2) Nun iſt $M' = \frac{Mg}{f+g}$, $M'' = \frac{Mf}{f+g}$ (§. 19.);
lglich erhält man: $\frac{Mg}{f+g} = \frac{Ae^3}{f}$; $\frac{Mf}{f+g} = \frac{Ae^3}{g}$, und
s beyden Gleichungen: $M = \frac{Ae^3(f+g)}{fg}$.

§. 295.

Um den Punkt C zu finden, wo ſich das Prisma, nn es in A und B unterſtützt iſt, am leichteſten zer-echen läßt, ſuche man den Werth von f, wofür M n Minimum wird. Zu dem Ende ſetze man die ganze inge des Prisma's AB = a, ſo wird $f + g = a$, $g = -f$, folglich $M = \frac{Ae^3 a}{af - f^2}$. Dieſer Ausdruck iſt nn am kleinſten, wenn ſein Nenner $af - f^2$ am größ-n, alſo $(a - 2f)\,df = 0$, oder $f = \frac{1}{2}a$ iſt; daraus lgt alſo, daß ein Prisma in der Mitte der Gefahr des erbrechens allemal am meiſten ausgeſetzt ſey.

Für dieſen Fall erhält man: $M = \frac{4Ae^3}{a}$, und
ym Parallelepipedum: $M = \frac{2Abc^3}{a}$.

Feſtigkeit ſteinerner Mauern.

§. 286.

Wir haben bisher die Feſtigkeit der Mauern bloß ach ihrer Stabilität beurtheilt, oder ſie als Maſſen

benachbarten, die durch ihr Gewicht allein vor dem Umstürzen gesichert sind. Da sie aber auf den Boden nicht, wie andere feste Körper, bloß hingestellt, sondern mit denselben durch Kalk oder Mörtel verbunden werden, so liegt noch ein zweyter Grund ihrer Festigkeit in der Cohäsion. Diese erfordern zwar erst eine gewisse Zeit, ehe sie ihre volle Wirksamkeit erreichen kann; allein da man nun gewöhnlich einer Mauer diese Zeit, sich zu befestigen, gönnet, so ist es allerdings erlaubt, bey derselben auf Cohäsion, als eine wichtige Ursache ihrer Stärke Rücksicht zu nehmen.

§. 287.

Fig. 77. **Aufgabe.** Es sey das Rechteck ABCD das Profil einer gleichdicken Mauer; ihre Dicke CD = c, ihre Höhe AC = h, und die Länge derselben = b; außerdem sey das Gewicht eines Kubikfußes der Steinmasse = m, und die Cohäsion des Steines mit dem Kalke für jeden Quadratfuß Fläche = A. Man sucht das Moment der ganzen Kraft, mit der die Mauer der Umdrehung um den Punkt C widersteht.

Auflösung. 1) Wir wollen die Kraft, die oben in A senkrecht auf AC angebracht werden muß, um den Widerstand der Mauer aufzuheben, = M setzen, so hat diese am Arme AC des Winkelhebels ACD das Umdrehungsmoment = Mh, dem also die Mauer, theils durch ihr Gewicht, theils durch die Kraft, womit sie in der Grundfläche CD an dem Boden haftet, ein gleiches Moment entgegensetzen muß.

2) Ihr Gewicht ist nun = mcbh; und wirkt aus ihrem Schwerpunkte G auf die Mitte E des Hebelarmes CD senkrecht; hat also an diesem das Moment CE . mcbh = $\frac{1}{2}$mc²bh.

3) Die Cohäsion widersteht einem Theile von M, = $\frac{Ac^2b}{2h}$ (§. 287. 2.), mit dem sie folglich einerley Moment $\frac{1}{2}$Ac²b hat. Beyde Momente zusammengenommen geben daher:

$$Mh = \tfrac{1}{2}c^2b\,(A + mh).$$

§. 288.

Nach den von **Lorgna** *) über die Cohäsion zwischen Kalk und Stein mitgetheilten Versuchen, ist für Felssteine A = 1728 pariser Pfunde, für Backsteine A = 1296 ℔; dabey wog der Kubikfuß des erstern 200 ℔, des letztern 140 ℔. Substituirt man diese Werthe für A und m in vorhergehender Formel, so erhält man für Felssteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2}c^2b\,(1728 + 200h),$$

und für Backsteine:

$$Mh = \tfrac{1}{2}c^2b\,(1296 + 140h).$$

Exempel. Wenn man nach dieser Formel die in §. 269. gefundene Gleichung für f verbessern will, so ist dort f, h + l, 1, was hier c, h, b genannt ist; daher hat man für das eigentlicht Moment des Widerstandes daselbst: $\frac{1}{2}$mf (8,64 + h + l), und die Gleichung ändert sich also in sofern ab, daß man allent-

*) Saggi di Statica e di meccanica pag. 91.

für Felsſtein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(864 + 100h) + bd^2(864 + 66\frac{2}{3}h)$

für Backſtein: $Mh = (bc^2 + 2bcd)(648 + 70h) + bd^2(648 + 46\frac{2}{3}h)$.

Feſtigkeit dehnbarer und elaſtiſcher Körper.

§. 290.

Die im §. 282. gefundene Relation zwiſchen abſoluter und reſpektiver Feſtigkeit gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß in der ganzen Fläche des Bruchs die Theile des Körpers zu gleicher Zeit von einanderreißen; daher ſchränkt ſie ſich bloß auf ſolche Körper ein, bey denen das Zerbrechen plötzlich geſchieht, wohin z. B. die verſchiedenen Steinarten, ſo wie alle ſpröden Körper, als Glas, ſpröde Metalle u. ſ. w. gehören. Ganz anders verhält ſich dagegen die Sache bey Körpern, die einer Ausdehnung und Zuſammenziehung fähig ſind; dieſe nehmen vor dem Zerbrechen allemal eine mehr oder minder gebogene Form an, und zerreißen deshalb an der konveren Seite, weil ſie da am meiſten ausgedehnt ſind, zuerſt; worauf dann nach und nach auch der Bruch in den übrigen Stellen erfolgt. Dies allmählige Zerbrechen macht, daß ihre reſpektive Feſtigkeit nach Verhältniß ihrer abſoluten weit geringer iſt, als bey unbiegſamen Körpern, wie in den folgenden §§ näher gezeigt werden ſoll.

§. 291.

Ueber die Geſetze, nach denen priſmatiſche Körper

durch angehängte Gewichte ausgedehnt werden, hat man zwar noch keine genauen Versuche angestellt; da aber bey Körpern, die sich zerbrechen lassen, die Ausdehnung nach Verhältniß ihrer Länge immer sehr gering ist, so läßt sich für diese als ein sicheres Axiom annehmen:

daß die Ausdehnung eines und desselben Körpers dem Gewichte, durch das sie hervorgebracht wird, proportional sey.

Daraus folgt nun unmittelbar:

Fig. 78. 1) Daß bey einerley Querschnitt des prismatischen Körpers AB, und einerley angehängtem Gewichte G, die Ausdehnung desselben Ff sich wie seine Länge AF verhalten müsse.

Man denke sich nemlich den Körper in lauter gleiche Querstreifen wie MNmn getheilt, so leidet jeder derselben vom Gewichte G eine gleiche Spannung, folglich auch gleiche Ausdehnung $m\mu$; daher verhält sich die Ausdehnung Pf des ganzen Körpers ABFI wie die Menge der Streifen, also wie seine Länge.

2) Daß bey einerley Länge des Körpers das Gewicht sich wie sein Querschnitt verhalten müsse, wenn es dieselbe Ausdehnung in ihm hervorbringen soll.

Gedenkt man sich nemlich jetzt den Körper seiner Länge nach in lauter gleiche Prismen getheilt, so erfordert jedes derselben, um einerley Ausdehnung zu bekommen, einerley angehängtes Gewicht; will man daher im ganzen Körper diese Ausdehnung hervorbringen, so ist dazu in eben dem Verhältnisse mehr Gewicht

nöthig, als die Menge der gleichen Prismen, oder der Querschnitt des Körpers größer ist.

3. Man setze nun, es sey bey einem Prisma von gegebener Materie für den Querschnitt 1, Länge 1, zur Ausdehnung ε das Gewicht G nöthig, so erfordert ein Prisma dessen Querschnitt $= S$, Länge $= 1$, zu eben der Ausdehnung ε das Gewicht GS (2.); folglich wird bey einem Prisma dessen Querschnitt $= S$, Länge $= l$, durch das Gewicht GS, die Ausdehnung εl hervorgebracht (1). Setzt man also für eben die Dimensionen des Prisma's die Ausdehnung, die durch das Gewicht P entsteht, $= z$, so hat man

$$GS : P = \varepsilon l : z$$

folglich: $z = \frac{P\varepsilon l}{GS}$

4. Da die Ausdehnung allemal der Länge des Körpers proportional ist, so setze man $z = \omega l$; alsdann wird $\omega = \frac{\varepsilon P}{GS}$, wo ε den Theil der Länge bedeutet, um den ein Prisma vom Gewichte G ausgedehnt wird, dessen Querschnitt $= 1$ ist.

5. Eben diese Formel gilt nun auch offenbar für die Verkürzung eines Prisma's, wenn es durch ein Gewicht oder sonst eine Kraft zusammengedrückt wird.

§. 292.

Fig. 79. Aufgabe. Ein Parallelepipedum, dessen Länge CA $= f$, Dicke IR $= c$, und Breite [illegible], sey im Punkte I unterstützt, und an seinem Endpunkte

A mit einem Gewichte M behängt; wie groß wird dies seyn müssen, um an der unterstützten Stelle eine gegebene Krümmung hervor zu bringen?

Aufl. 1) Indem der Körper durch das Gewicht gebogen wird, wird seine obere Seite ausgedehnt, und die untere zusammengedrückt; es muß also zwischen beyden eine Stelle C geben, die weder Ausdehnung noch Zusammenziehung leidet, und folglich seine natürliche Länge behält.

2) Es sey Cc ein Element dieser Länge, O der Mittelpunkt seiner Krümmung, so schließen die Halbmesser OC und Oc einen gebogenen Querstreif Eeli des Körpers ein, und man hat für jede andere Stelle P desselben:

$$OC : OP = Cc : P\pi .$$

oder, wenn man $OC = r$, $CP = x$, und $Cc = df$ setzt:

$$r : r + x = df : P\pi, \text{ also}$$

$$P\pi = \frac{(r+x)\,df}{r} = df + \frac{x\,df}{r}$$

3) Da nun das Element $P\pi$ im natürlichen Zustande $= Cc$ war, so ist es durch das Biegen um $\frac{x\,df}{r}$, oder um den Theil $\frac{x}{r}$ seiner Länge ausgedehnt; setzt man also die Kraft, die zu dieser Ausdehnung erfordert wird, $= dp$; die Dicke des Elementes $Pp = dx$; so hat man: $S = bdx$, $\omega = \frac{x}{r}$, $P = dp$, folglich:

$$\frac{x}{r} = \frac{edp}{Gbdx}, \text{ und } dp = \frac{Gbxdx}{er}.$$

4) Dieſe Kraft wirkt demnach im Punkte P am Winkelhebel ECa dem Gewichte M entgegen, und hat an demſelben das Moment $xdp = \frac{Gbx^2dx}{er}$. Hiervon iſt das Integral $= \frac{Gbx^3}{2er}$, und für $x = CE = g$, die Summe der Momente von allen zwiſchen C und E liegenden Elementen $= \frac{Gbg}{2er}$.

5) Es bleibt jetzt noch übrig, den Widerſtand von Seiten der unterhalb C liegenden Elemente zu beſtimmen. Da dieſe ſich im zuſammengedruckten Zuſtande befinden, ſo haben ſie ein Beſtreben, ſich auszudehnen, und wirken daher auf gleiche Art am Arme IC des Winkelhebels ICa dem Gewichte M entgegen. Setzt man alſo im vorigen Integrale $x = CI = c - g$, ſo erhält man für die ganze Summe ihre Momente: $\frac{Gb(c-g)^3}{3er}$

6) Beyde Momente zuſammengenommen müſſen nun dem Momente M . Ca des Gewichtes M gleich ſeyn. Setzt man darin für Ca die ganze Länge $CA = f$, (von der Ca immer nur wenig abweichen kann, wofern die Biegung des Armes CA nicht ſehr beträchtlich iſt) ſo wird:

$$\frac{Gb[g^3 + (c-g)^3]}{3er} = Mf.$$

7) Um aus dieſer Formel die Größe G wegzuſchaffen, müßte man das Verhältniß von g zu c kennen, oder im Querſchnitte ECI die Lage des Punktes C an-

zugeben wiſſen. Da aber dieſer Punkt höher oder tiefer fällt, je nachdem der Körper ſich leichter zuſammendrücken oder ausdehnen läßt, ſo beruhet das Verhältniß $g : c$ auf der jedesmaligen Beſchaffenheit des Körpers, und kann alſo nur aus der Erfahrung abgeleitet werden. Setzen wir vorläufig $g = \varkappa c$, ſo wird $g^3 + (c - g)^3 = c^3(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^3)$, folglich:

$$Mf = \frac{Ghc\,(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varkappa}$$

§. 293.

Die Krümmung des Körpers nimmt alſo in dem Maaße zu, wie man das Gewicht M vergrößert, bis zuletzt der Körper oben bey E ſo weit ausgedehnt wird, daß er an dieſer Stelle zerreißen muß. Sobald dies geſchieht, erfolgt der Bruch, ohne Vermehrung des Gewichtes, auch nach und nach in den übrigen Stellen des Querſchnittes ECI: denn man ſieht offenbar, daß der Widerſtand von Seiten des Körpers immer mehr abnehmen muſſe, je weniger Theile von ihm in der Fläche ECI noch miteinander zuſammenhängen.

Um daher das Gewicht M zu finden, wodurch der Bruch des Körpers bewirkt wird, ſetze man $G =$ dem Maaße A der abſoluten Feſtigkeit des Körpers; alsdann bezeichnet ε den Coefficienten der Ausdehnung, die unmittelbar dem Zerreißen vorhergeht, folglich, da die Ausdehnung des obern Elementes $Ee = \frac{gdf}{r}$ iſt, (§. 292. 3.) hat man: $\varepsilon = \frac{g}{r}$, $\varepsilon r = g = \varkappa c$, alſo:

Mf

$$Mf = Abc^3 \left(\frac{1 - 3u + 3u^2}{3u}\right);$$

oder, wenn man den beständigen Faktor $\frac{1 - 3u + 3u^2}{3u} = \lambda$ setzt:

$$Mf = \lambda Abc^3.$$

§. 294.

Vergleicht man diese Formel mit der, die wir vorhin (§. 283. 2.) für die respektive Festigkeit unbiegsamer Körper gefunden haben, so zeigt sich, daß beyde bloß in dem beständigen Coefficienten von einander abweichen. In letzterer ist nemlich allemal $\lambda = \frac{1}{2}$; in ersterer kann λ nach Beschaffenheit der Materie mancherley Werthe annehmen, die sich aber, wie schon erinnert ist, nur durch Versuche bestimmen lassen.

Bey Körpern, die bloß dehnbar, aber nicht compressibel sind, ist $CI = o$, also $g = c$, $u = 1$, folglich $\lambda = \frac{1}{3}$.

Bey Körpern hingegen, die vollkommen elastisch sind, oder eben so viel Ausdehnungs- als Zusammenziehungsvermögen besitzen, fällt der Punkt C unstreitig zwischen E und I in die Mitte; folglich hat man für diese: $g = \frac{1}{2}c$, $u = \frac{1}{2}$, also $\lambda = \frac{1}{6}$.

§. 295.

Wird das Parallellepipedum in seinen beyden Endpunkten A und B unterstützt, und das Gewicht in der Mitte C aufgehängt, so bringt dies dieselbe Wirkung hervor, als wenn der Punkt C unterstützt würde, und

bey A und B die Hälfte des Gewichtes vorwärts zöge. Setzt man also im gegenwärtigen Falle das Gewicht, wodurch das Parallellepipedum zerbrochen wird, $= P$, seine ganze Länge $= a$, so wird $M = \frac{1}{2} P$, $f = \frac{1}{2} a$, folglich:

$$Pa = 4 \lambda A b c^2.$$

Respektive Festigkeit des Holzes.

§. 296.

Bey den Versuchen, die **Muschenbrök** über das Zerbrechen des Eichenholzes angestellt hat, hatten die Parallellepipeda insgesammt einerley Länge $a = 18''$ Rheinl. und Breite $b = 0{,}26'$; sie wurden an den Seiten unterstützt, und in der Mitte mit Gewichten behängt, die in sehr geringen Quantitäten nach und nach vermehrt wurden, bis der Bruch erfolgte. In nachstehender Tafel enthält die erste Kolumne die verschiedene Dicke derselben, die zweyte das Gewicht, wovon sie zerbrochen, und die dritte den daraus berechneten Werth von λA:

c	P	λA
0,33″	$13\frac{1}{2}$ ℔	2146 ℔
0,40	$23\frac{1}{2}$ —	2542 —
0,52	$31\frac{1}{2}$ —	2016 —
0,58	$32\frac{1}{2}$ —	1671 —
0,68	$50\frac{1}{2}$ —	1860 —

Das Mittel zwischen diesen Resultaten genommen, gäbe demnach: $\lambda A = 2053$.

Auf gleiche Weiſe erhält man aus ſeinen übrigen Verſuchen für Ulmenholz λA = 946 ℔
— Eſchenholz — 2588 —
— Lindenholz — 1719 —
— Tannenholz — 1504 —

Anmerk. Büffons *) merkwürdige Verſuche mit eichenen Balken von 7 bis 28 Fuß Länge und 4 bis 8 Zoll Dicke würden unſtreitig vor allen andern Verſuchen dieſer Art den Vorzug verdienen, wenn ſie nicht leider mit gar zu weniger Sorgfalt angeſtellt wären. Es iſt nemlich ein äußerſt wichtiges Verſehen von ihm, daß er die Gewichte nicht nach und nach, ſondern jedesmal 500 Pfd. weiſe, ja bey einigen Verſuchen ſogar 1000 Pfd. weiſe, verſtärkt hat, wodurch begreiflich die Fibern des Holzes, vorzüglich bey langen Balken, weit über das Geſetz des Gleichgewichtes ausgedehnt, und daher viel früher zerriſſen worden ſind, als es bey einem vorſichtigen Verfahren der Fall hätte ſeyn können. Da die Reſultate ſeiner Verſuche für einerley Länge der Balken allemal ziemlich genau zuſammenſtimmen, ſo ſetze ich davon in nachſtehender Tafel bloß die mittleren Werthe her:

Länge.	mittl. Werth von λA
7 Fuß	1840 Pfd.
8 —	1783 —
9 —	1724 —
10 —	1667 —
12 —	1659 —
16 —	1547 —
20 —	1429 —

Man ſieht aus dieſer kurzen Zuſammenſtellung, daß ſeine Balken nach Verhältniß deſto leichter zerbrachen, je länger ſie waren; offenbar aus dem Grunde, weil bey längern Balken die Fibern durch die plötzliche Zunahme des Gewichtes deſto mehr erſchüttert, und zum Bruche ſollicitirt wurden.

*) Mem. de l'acad. de Paris 1740. pag. 453. und 1741 pag. 291. Auch im Hamb. Magazin V. Band. S. 506.

§. 297.

Aufgabe. Unter den rechtwinklichten Bal
die aus einem cylindrischen Stamme von gegebe
Durchmesser e gehauen werden können, denjenige
bestimmen, der die meiste respektive Festigkeit hat.

Fig. 80. **Aufl.** 1) Man setze die Breite des Ba
$AD = x$, seine Höhe $DB = u$; so sind zwey Be
dungen zu erfüllen: einmal soll $x^2 + u^2 = e^2$,
dann das Produkt $\lambda A x u^2$ ein Maximum seyn.

2) Letztere giebt, weil λA ein unveränderli
Faktor ist: $d(xu^2) = u^2 dx + 2xudu = o$.

erstere . . . $2xdx + 2udu = o$.

3) Multiplicirt man die zweyte Gleichung mi
und zieht sie von erstlerer ab, so bleibt übrig:

$(u^2 - 2x^2)\, dx = o$, oder $u^2 = 2x^2$, woraus
$u = x\sqrt{2}$ wird.

4) Man fälle aus D auf AB das Perpendi
DE, und setze $AE = Z$, so hat man:

$AB : AD = AD : AE$

$e : x = x : z$, also

$ez = x^2$.

Da nun $e^2 = u^2 + x^2 = 3x^2$, so wird $e^2 = 3$
also $z = \frac{1}{3}e$. Hieraus fließt folgende Construktion

Man theile den Durchmesser AB in drey glei
Theile, errichte auf ihm aus einem der Theilungspun
E ein Perpendikel, und verlängere dies, bis es den Kr
irgendwo in D schneidet, so sind AD und BD die v
langte Seiten des Rechtecks.

§. 298.

Fig. 81. Aufgabe. Ein rechtwinkliger Balken AB, der in seinen Endpunkten A und B unterstützt ist, sey mit dem Gewichte P beladen, das aber nicht, wie vorhin, auf einer einzelnen Stelle ruhet, sondern gleichförmig auf ihm, seiner Länge nach, vertheilt ist; man fragt, wie groß dies seyn müsse, um ihn zu zerbrechen.

Auflösung. 1) Es sey AYB die Kurve, in die der Balken unmittelbar vor dem Zerbrechen gebogen wird. Man setze seine ganze Länge $= a$, die Abscisse $AX = x$, so ist das Gewicht, das auf das Element Yy drückt, weil man ohne merklichen Fehler $Yy = Xx$ setzen kann, $= \frac{Pdx}{a}$, und sein Moment gegen die Mitte $c = Xf$.

$\frac{Pdx}{a} = \frac{P}{a}.(x - \frac{1}{2}a)\,dx$, dessen Integral $= \frac{P}{2a}(x^2 - ax + C)$ ist.

2) Dies Integral ist für $x = \frac{1}{2}a$, $= o$, also $C = \frac{1}{4}a^2$. Setzt man nun ferner darin $x = a$, so wird das Moment des ganzes Armes cB gegen $c = \frac{PC}{2a} = \frac{1}{8}Pa$.

3) Der Unterstützungspunkt B übt dagegen auf den Endpunkt des Balken den entgegengesetzten Druck $= \frac{1}{2}P$ aus, der das Moment $\frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}Pa$ hat, den Arm cB nach entgegengesetzter Richtung um c zu drehen, und den Balken an dieser Stelle zu krümmen; wird daher ersteres Moment $\frac{1}{8}Pa$ von letzterm

abgezogen, so bleibt für das wahre Moment der Biegung $\frac{1}{8}$ Pa übrig.

4) Man hat also (§. 293.) $\frac{1}{8}Pa = \lambda Abc^2$, oder

$$Pa = 8\lambda Abc^2$$

Daher muß das Gewicht, um den Balken zu zerbrechen, doppelt so groß seyn, als nöthig wäre, wenn es in seiner Mitte aufgehängt würde (§. 295.).

§. 299.

Zur Erläuterung dieser Formel mag folgendes leichte Beyspiel dienen:

Die Sparren eines Daches sind zum Theil ihrem eigenen Gewichte ausgesetzt, zum Theil ruhet auf ihnen die äußere Bekleidung des Daches; man kann also fragen, wie stark sie zum wenigsten seyn müssen, damit sie unter dieser Last nicht brechen?

Fig. 26. Man setze ihre Breite $= x$, ihre Dicke $= u$, das specifische Gewicht des Holzes $= G$, die äußere Last, die auf jedem Fuße ihrer Länge ruhet $= \kappa$; ferner sey die halbe Breite des Daches $AD = b$, der Neigungswinkel der Dachfläche $CAD = I$, so ist ihre Länge $AC = \frac{b}{\cos I}$, also das ganze Gewicht O, das jede Sparre zu tragen hat $= \frac{b}{\cos I}(K + Gxu)$.

Da dies Gewicht auf einer schiefen Fläche liegt, so leidet die Sparre von ihm bloß den senkrechten Druck $O \cos I$; man hat also gegenwärtig $P = b(K + Gxu)$.

Weil man die Sparren gewöhnlich an irgend einer Stelle F unterſtützt, ſo wollen wir ſetzen, dies geſchehe in der Mitte; alsdann iſt hier $a = \frac{b}{2 \operatorname{Ccs} I}$, folglich bekommt man die Gleichung:

$$\frac{b^3 (K + \frac{1}{2} Gxu)}{2 \operatorname{Cos} I} = 8 \lambda A x u^3$$

und wenn man zwiſchen x und u das vortheilhafteſte Verhältniß $1 : \sqrt{2}$ annimmt (§. 297.):

$$b^3 (K + Gx^2 \sqrt{2}) = 32 \lambda A x^3$$

$$\text{oder } x^3 - \frac{b^3 G \sqrt{2}}{32 \lambda A \operatorname{Ccs} I} \cdot x^2 - \frac{b^3 K}{32 \lambda A \operatorname{Cos} I} = 0.$$

Exempel. Für tannene Balken iſt nach Lorgna's Verſuchen *) $4 \lambda A = 5973$ ℔, $G = 44$ ℔; dieſe Werthe ſubſtituirt, geben vorläufig:

$$x^3 - 0{,}00130222 \cdot b^3 \operatorname{Sec} I \, x^2 - 0{,}000020927 \, b^3 K \operatorname{Sec} I = 0$$

Es ſey nun $b = 12$ Fuß, $I = 45°$, das Gewicht von 1 Quadratfuß Dachfläche $= 6$ ℔, die Diſtanz der Sparren 4 Fuß, ſo iſt $K = 12$ ℔, folglich erhält man:

$$x^3 - 0{,}26519 \, x^2 - 0{,}05826 = 0$$

und daraus $x = 0{,}4992$ Fuß, oder ſehr nahe 6 Zoll, welches $u = 8\frac{1}{2}$ Zoll giebt.

Feſtigkeit cylindriſcher Körper.

§. 300.

Lehrſatz. Die Gewichte, wodurch zwey Cylinder von einerley Materie zerbrochen wer-

*) a. a. O. pag. 65.

den, verhalten sich direkt wie die Cuben ihrer Durchmesser, und verkehrt wie ihre Längen.

Fig. 69. Beweis. 1) Es sey von einem dieser Cylinder EMNI der Querschnitt, in dem der Bruch geschieht, O sein Mittelpunkt, C der Grenzpunkt zwischen Ausdehnung und Zusammenziehung; der Durchmesser $EI = c$, $EC = g$, $CP = x$; die Ordinate $MN = y$, so ist das Element $MNmn = ydx$, also (§. 292. 3.) $dp = \frac{Gyxdx}{er}$; das Moment $xdp = \frac{Gyx^2dx}{er}$, und die Summe dieser Momente $= \frac{G\int yx^2dx}{er}$.

2) In d[illegible] [illegible]egr[illegible]e muß nun theils $x = g$, theils $x = c - g$ [illegible]en (ebendas. 4. 5.). Für ersteres x sey $\int yx^2dx =$ [illegible] für letzteres $= N$, so hat man für das Moment des gesammten Widerstandes: $\frac{G(M+N)}{er}$.

3) Für den Fall des Zerbrechens ist nun, wenn man $G = A$ setzt, $er = g$. Heißt also a die Länge des cylindrischen Armes, an dem die Kraft wirkt, die ihn zerbricht, und die wir P nennen wollen, so ist $Pa = \frac{A(M+N)}{g}$.

4) Um zu sehen, wie sich y durch x ausdrucken läßt, nenne man $OP = u$, so hat man $y^2 = c^2 - 4u^2$, und $x = u + g - \frac{1}{2}c$ oder $u = x - g + \frac{1}{2}c$, folglich $y = \sqrt{[c^2 - (2x - 2g + c)^2]}$.

5) Für den andern Cylinder sey nun c', g

x' u. ſ. f., was vorhin c, g, a u. ſ. f. hieß. Man ſetze $c' = mc$, ſo iſt auch $g' = mg$, $x' = mx$, folglich $dx' = mdx$, und $y' = \sqrt{[m^2c^2 - m^2(2x - 2g + c)^2]} = my$, alſo $y'x'dx' = m^4yx^2dx$, mithin $M' = m^4M$, $N' = m^4N$.

6) Daher hat man $P'a' = \frac{A(M' + N')}{g'} = \frac{m^4A(M + N)}{mg} = m^3Pa$ (3), folglich $P'c'^3a' = m^3c\,Pa = Pc^3a$, und

$$P : P' = c^3a' : c'^3a = \frac{c^3}{a} : \frac{c'^3}{a'}.$$

§. 301.

Folgerung 1) Da $\frac{Pa}{c^3} = \frac{P'a'}{c'^3}$, ſo iſt $\frac{Pa}{c^3}$ eine beſtändige Größe, es mögen a und c Werthe haben, welche man will. Setzt man alſo $\frac{Pa}{c^3} = K$, ſo wird $P = \frac{Kc^3}{a}$; in welcher Formel der unveränderliche Koefficient K durch Verſuche beſtimmt werden muß.

Fig. 83. 2) Wenn eine Kette durch ein Gewicht P geſpannt wird, ſo trägt jedes Glied derſelben aebg dies Gewicht in den Punkten a und b, wo die beyden nächſten Glieder in daſſelbe eingreifen, und davon vertheilt ſich die Hälfte auf jeden der Punkte e und f. Dieſe Kraft könnte, wenn ſie groß genug iſt, den Ring an den Stellen e und f zerreißen: ſie wirkt aber eher darauf hin, ihn in b zu zerbrechen, weil letzteres leichter

geſchehen kann, als erſteres. Setzt man daher die Dicke des Ringes $ee = c$, ſeine innere Weite $e\gamma = f$, ſo iſt die mittlere Breite deſſelben $= f + c$, alſo das Gewicht, wodurch er zerbrochen wird: $P = \frac{4Kc^2}{f+c}$.

3) Man ſieht hieraus, daß die Stärke einer Kette nicht bloß auf der Dicke der Glieder, ſondern auch zugleich auf ihrer Weite beruhe, und daß es alſo ſehr zweckmäßig ſey, ihnen eine längliche Form zu geben.

4) Setzt man $f = nc$, ſo wird $P = \frac{4Kc^2}{n+1}$; daher gilt der gewöhnliche Satz: daß ſich die Stärke der Kette wie das Quadrat der Dicke ihrer Glieder verhalte, nur dann, wenn Weite und Dicke bey ihnen ein beſtimmtes Verhältniß zu einander haben.

Vom Widerſtande feſter Körper beym Zuſammendrücken derſelben.

§. 302.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo ein priſmatiſcher Körper zweyen entgegengeſetzten Kräften ausgeſetzt iſt, die ihn genau ſeiner Länge nach zuſammen zu drücken ſtreben. Wiewohl die bisherige Theorie nicht zeigt, wie dadurch der Zuſammenhang ſeiner Theile leiden könne, da er hier weder unmittelbar angegriffen, noch durch Hebelkraft zum Widerſtande gereizt wird; ſo lehrt doch die Erfahrung, daß auch unter dieſen Umſtänden die Feſtigkeit des Körpers ihre

Punkte □ die Last $P \cdot \frac{AH}{AD}$ äquivoliren. Setzt man also $AH = f$, so wird jetzt:

$$\frac{Pf}{a} = \frac{2\pi^2 Ehc^3 \operatorname{Sin} l \operatorname{Cos} l^4}{l^3},$$

folglich $P = \frac{2\pi^2 Ehc^3 \operatorname{Sin} l \operatorname{Cos} l^4}{af}$.

Da aber der Balken in H nicht gehalten wird, so muß man zugleich darauf Rücksicht nehmen, ob seine Hälfte AD auch stark genug sey, diese Last [illegible] zu können. Man setze die Last, die ihm in eben dem Punkte H seine respektive Festigkeit zu tragen gestattet, $= Q$, seine Dicke $= e$, Breite $= g$, so hat man

$$\frac{Qf(a-f)}{a} = \lambda Age^2 \text{ [illegible]}$$

also: $Q = \frac{\lambda Age^2 a}{af - f^2}$

Zwischen diesen beyden Gewichten P und Q darf man offenbar nur dasjenige wählen, welches am kleinsten ist.

§. 310.

Sowohl für $l = 0$, als für $l = 90°$ ist $P = 0$; es muß also irgend einen Winkel geben, wofür P ein Maximum wird, oder für den der Balken, bey einerley Breite und Dicke der Streben, die möglichst größte Last zu übernehmen im Stande ist. Um diesen zu

werden kann, als das Moment des Widerſtandes, den ihr die Feſtigkeit des Balken entgegen zu ſetzen fähig iſt.

Es ſey AyB die Kurve, in die der Balken bereits gebogen iſt, c die Mitte derſelben, ſo wirkt die Laſt O als Hebelkraft an dem krummlinigten Arme Ayc, und ſtrebt dieſen um c zu drehen. Fällt man alſo cf auf ihre Richtung AB ſenkrecht, ſo erhält man für das Umdrehungsmoment derſelben: cf . O (§. 59.).

Hierdurch werden nun, eben ſo wie oben (§. 59.), die Fibern des Elementes Eiei auf der einen Seite von Cc ausgedehnt, und auf der andern zuſammengedrückt; mit einem Worte: ſo wie in jenem Falle Gewicht und Cohäſion am Winkelhebel ECa gegeneinander wirkten, ſo geſchieht dies jetzt am geradlinigten Hebel ECf.

§. 304.

Auf gleiche Art wird auch die Krümmung an jeder andern Stelle der Kurve AyB durch die Laſt O hervorgebracht. Setzt man alſo $Ax = x$, $xy = y$ den Bogen $Ay = s$, und den Krümmungshalbmeſſer bey $y = r$, ſo bekommt man die Gleichung (§. 292. 7.)

$$Oy = \frac{Gbc^3(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon r}$$

oder, wenn man $\frac{G(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2)}{3\varepsilon} = E$ ſetzt: $Oy = \frac{Ebc^3}{r}$.

Bekanntlich iſt nun $r = -\frac{ds^3}{d^2y dx}$; weil aber

die Kurve AyB doch gewiß sehr wenig von der geraden Linie AB abweicht, so kann man hier ohne Bedenken $ds = dx$ setzen, wodurch $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ wird. Dieser Werth von r giebt:

$$Oydx^3 + Ebc^3d^2y = o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dy, und integrirt dann, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}Oy^2dx^2 + \tfrac{1}{2}Ebc^3dy^2 = Gdx^2$$

oder, wenn man $C = \frac{1}{2}Of^2$ setzt:

$$O(f^2 - y^2)dx^2 = Ebc^3dy^2, \text{ also}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(f^2-y^2)}} \cdot \sqrt{\frac{Ebc^3}{O}}$$

Setzt man nun noch $\sqrt{\frac{Ebc^3}{O}} = g$, so wird $dx = \frac{gdy}{\sqrt{(f^2-y^2)}}$, und davon das Integral genommen:

$$x = C + g \cdot \text{arc Sin.} \frac{y}{f}.$$

§. 305.

Aus dieser Gleichung für die Kurve AyB lassen sich folgende Sätze ziehen:

1) Für $x = o$ ist auch $y = o$, also $C = o$, man hat also blos $x = g \cdot \text{arc Sin.} \frac{y}{f}$, und gegenseitig: $y = f \cdot \text{Sin.} \frac{x}{g}$

2) Zu [illegible]

oder $x = g\pi$, und da dies unten bey B geſchieht wird, wenn wir die ganze Länge des Balken AB ſetzen: $a = g\pi$.

3) Darin für g ſeinen Werth $\sqrt{\frac{Ebc^3}{O}}$ ge

giebt: $Oa^2 = \pi^2 Ebc^3$, oder $O = \frac{\pi^2 Ebc^3}{a^2}$. Da di

Ausdruck lauter beſtändige Größen enthält, ſo f

hieraus der merkwürdige Satz: **daß einerley**

wicht erfordert werde, den Balken, er ſey m

oder weniger gebogen, in ſeiner Krümmung

erhalten.

4) Wenn man die Gleichung $y = f \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$ di

renziirt, ſo erhält man: $\frac{dy}{dx} = \frac{f}{g} . \operatorname{Cos} \frac{x}{g}$; alſo n

y ein Maximum für $\operatorname{Cos} \frac{x}{g} = o$, oder $x = \frac{1}{2} g\pi =$

d. i. in der Mitte c, und daſelbſt iſt $y = f$.

5) Durch nochmaliges Differenciiren wird:

$= - \frac{f}{g^2} \operatorname{Sin} \frac{x}{g}$, folglich $\frac{1}{r} = \frac{y}{g^2} = \frac{\pi^2 y}{a^2}$. Je m

alſo der Balken gebogen iſt, deſto größer iſt zwar

Moment der Laſt Oy, aber auch zugleich in eben d

Verhältniſſe deſto größer das Moment des Widerſt

des $\frac{Ebc^3}{r}$, woraus der Satz (3) nun ſehr begreifl

wird.

§. 306.

Da der für O gefundene Werth bloß auf die Biegung des Balken ſich bezieht, ſo könnte es ſcheinen, als müſſe die Laſt, die ihn wirklich zerbrechen ſoll, größer als O ſeyn. Allein dies wäre offenbar falſch geſchloſſen: denn da nicht mehr Laſt erfordert wird, den Balken in größerer als in geringerer Biegung zu erhalten, ſo iſt eben dieſe Laſt auch im Stande, ihm die Biegung zu ertheilen, die unmittelbar dem Bruche vorhergeht. Ueberdies lehrt die höhere Mechanik, daß wenn eine Bewegung einmal eingeleitet iſt, und dabey Kraft und Widerſtand ſich das Gleichgewicht halten, ſie alsdann ungehindert fortdaure; daraus folgt alſo für unſern Fall: daß der Balken, wenn er einmal angefangen hat ſich zu krümmen, bey eben dem Gewichte O ſich von ſelbſt immer mehr und mehr krümmen müſſe, und das ſo lange, bis er endlich bricht.

§. 307.

Nach der hier vorgetragenen Theorie verhält ſich demnach die Laſt, die ein Parallellepipedum von gegebener Materie zu tragen im Stande iſt: **wie der Kubus derjenigen Seite ſeines Querſchnittes, nach der es gebogen wird, einfach wie die andere Seite, und verkehrt, wie das Quadrat ſeiner Länge.**

Sehen wir jetzt, in wie weit die Erfahrung hiermit übereinſtimmt:

1. In Anſehung des Verhältniſſes der Länge.

Nach Muſchenbrök (Diſſ. phyſ. pag. 655.) zerbrach

ein Parallelepipedum aus Eichenholze, 0,23 Zoll breit und dick,

bey 18 Zoll Länge unter einer Laſt von 23 ℔
— 9 — — — — — — 92 —
— 8 — — — — — — 128 —

Wie genau dieſe drey Verſuche mit der Theorie zuſammenſtimmen, zeigt ſich aus folgender Vergleichung der letztern beyden mit erſterm:

Länge	angegebenes Gewicht	berechnetes Gewicht
18 Zoll	23 Pfd.	23 Pfd.
9 —	92 —	92 —
8 —	118 —	$116\frac{1}{2}$ —

Ein Parallelepipedum aus Eſchenholze, 9 Zoll lang, zerbrach unter einem Gewichte von 100 Pfd. Nach dieſer Angabe hätte eben dies Parallelepipedum bey 12 Zoll Länge zerbrechen müſſen von — $56\frac{1}{4}$ Pfd.
es zerbrach von — — 55 —
Es iſt alſo keinem Zweifel unterworfen, daß das verkehrte Verhältniß des Quadrates der Länge der Natur vollkommen angemeſſen ſey.

2. In Anſehung des Verhältniſſes der Dicke.

Ein Parallelepd. aus Tannenholze, 4 Fuß lang, 0,51 Zoll breit und dick, zerbrach unter einer Laſt von 64 Pfd. 9 Unzen. (Muſchenb. ad phil. Tom. I pag. 474.)

Ein anderes, das bey eben der Länge 0,7 Zoll ins Gevierte betrug, zerbrach von 226 Pfd.

Erſterer Verſuch giebt $\pi^2 E = 2197815$
letzterer — — $\pi^2 E = 2168696$

Man

Man ſieht hieraus, daß ſich beym Tannenholze ch das kubiſche Verhältniß der Dicke als richtig an- hmen läßt. Bey andern Holzarten hingegen, na- entlich beym Eichenholze, ſcheint es vielmehr, als hte ſich der Widerſtand nach dem Quadrate der Dicke; ch ſind die von Muſchenbrök darüber angeſtellten erſuche nicht zahlreich genug, als daß man aus ihnen here Reſultate ziehen könnte.

§. 308.

§. 26. **Aufgabe.** Ein horizontal liegender Balken B ſey in den Endpunkten A und B unterſtützt, und in r Mitte D durch eine Hängeſäule CD mit zweyen treben AC und BC verbunden, die ſich bey A und B gen Widerlagen ſtützen, und bey C ineinander gefugt ıb; man fragt, wie viel Gewicht der Balken unter eſen Umſtänden zu tragen im Stande ſey.

Auflöſ. 1) Wenn der Schwerpunkt der Laſt in die Mitte D fällt, ſo iſt klar, daß der Balken keine Bie- ung leiden könne, ohne die Säule CD mit ſich herab- ıziehen; dies kann aber nicht geſchehen, wofern nicht ıgleich die Streben AC und CB gebogen werden. Es ımmt alſo hier nur darauf an, wie viel Widerſtand ieſe ihrer Länge nach auszuüben im Stande ſind, ohne ch zu krümmen, oder, welches einerley iſt, ohne zu rbrechen (§. 305. 3.).

2) Setzt man nun die Dicke der Streben $= c$, ire Breite $= b$, die halbe Länge des Balken $AD = a$, n Winkel $CAB = CBA = I$, ſo iſt $AC = BC =$

Aufl. 1) Es sey die gesuchte Kraft = M, der Winkel rBu, den ihre Richtung Br mit der Horizontale Γu macht, = ϑ, so zerfällt sie in eine nach Bu = M Cos ϑ, und in eine nach der Vertikale Bv = M Sin ϑ.

2) Erstere wird allein darauf verwandt, die Friktion zu überwinden, der sie also gleich seyn muß. Setzt man daher den Druck, den der fortzuziehende Körper gegen den Boden ausübt, = Π, die Verhältnißzahl der Friktion = λ, so wird M Cos ϑ = λΠ.

3) Das Gewicht des Körpers ist eigentlich auf die Fläche BD, worin er den Boden berührt, gleichförmig vertheilt; da aber hier die Fläche nicht in Betracht kommt, so ist es einerley, wenn man sich sein Gewicht bloß auf die Endpunkte B und D vertheilt denkt.

4) Es komme nun auf B der Theil P′, auf D der Theil P″, so hat man P′ + P″ = P, und weil von P′ der Theil M Sin ϑ (1) aufgehoben wird: Π = P′ − M Sin ϑ + P″ = P − M Sin ϑ.

5) Daher wird M Cos ϑ = λP − λM Sin ϑ, folglich: $M = \frac{\lambda P}{\text{Cos } \vartheta + \lambda \text{ Sin } \vartheta}$.

§. 318.

Wenn ein Pferd vor einem Schlitten, nach der schrägen Richtung Br zieht, so ist M die Spannung des Zugseiles, und die eigentliche Kraft, die das Pferd

anzuwenden hat, ist (§. 163.) $= M \operatorname{Cos} \vartheta = \frac{\lambda P}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta}$, also jederzeit kleiner, als beym horizontalen Zuge, und zwar beträgt der Unterschied $\frac{\lambda^2 P \operatorname{tang} \vartheta}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta}$, den wir $= P$ setzen wollen.

Dagegen ist der vertikale Druck, den das Pferd leidet, $= M \operatorname{Sin} \vartheta = \frac{\lambda P \operatorname{tang} d}{1 + \lambda \operatorname{tang} \vartheta} = \frac{p}{\lambda}$, folglich $> p$, weil λ allemal < 1 ist.

Man sieht also hieraus, daß dennoch der schräge Zug, er geschehe unter welchem Winkel man will, nie Vortheil gewähren kann, weil dabey das Pferd weit mehr zu tragen bekommt, als ihm das Fortziehen erleichtert wird: da doch bekanntlich allen Thieren das Tragen beschwerlicher fällt, als das Ziehen.

Gleichgewicht auf der schiefen Fläche mit Betrachtung der Friktion.

§. 319.

Fig. 25. Aufgabe. Einem Gewichte V, das auf der schiefen Fläche [illegible] liegt, wirke nach der Richtung [illegible], die durch seinen Schwerpunkt [illegible] geht, die Kraft V entgegen: man fragt, wie groß diese seyn müsse, um zu verhindern, daß das Gewicht längs der Fläche herabgleite.

Aufl. 1. Wenn die Winkel, welche die Linien AC und GH mit der Horizontalen [illegible] machen, wie [illegible]

§. 117. I und I' heißen, so entspringt aus dem Gewichte P nach der Richtung GI, parallel mit der Fläche, die Kraft = P Sin I, und der auf die Fläche senkrechte Druck = P Cos I.

2) Wird die Kraft V auf gleiche Art zerlegt, so erhält man aus ihr, da der Winkel IGD = GDO = I' — I ist, nach den entgegengesetzten Richtungen IG und OG die Kräfte: V Cos (I' — I) und V Sin (I' — I).

3) Diese beyden Kräfte wirken jenen erstern entgegen; daher behält das Gewicht nach GI noch die Kraft P Sin I — V Cos (I' — I), und der eigentliche Druck, den es senkrecht gegen die Fläche ausübt, wird = P Cos I + V Sin (I' — I).

4) Soll also das Gewicht in Ruhe bleiben, so muß die Friktion, die aus letzterem Drucke entspringt, die noch vorhandene Kraft nach GI aufheben, folglich hat man:

$$P \sin I - V \cos (I' - I) = \lambda P \cos I + \lambda V \sin (I' - I),$$

woraus $V = \frac{P (\sin I - \lambda \cos I)}{\cos (I' - I) - \lambda \sin (I' - I)}$ wird.

§. 320.

Folgerung 1. Wenn die Richtung der Kraft V mit AC parallel ist, so ist I' = I, also V = P (Sin I — λ Cos I).

2. Ist sie dagegen horizontal, so wird I' = 0, folglich:

$$V = \frac{P (\sin I - \lambda \cos I)}{\cos I + \lambda \sin I} = \frac{P (\tang I - \lambda)}{1 + \lambda \tang I};$$ oder,

wenn man unter ω einen Winkel verſteht, deſſen Tangente $= \lambda$ iſt: $V = P \cdot \text{tang}(I - \omega)$.

3. Für $V = 0$, iſt $\text{Sin } I - \lambda \text{ Cos } I = 0$, alſo $\text{tang } I = \lambda$, $I = \omega$. Bey dieſem Neigungswinkel der Fläche iſt alſo der Körper, ſich ſelbſt überlaſſen, im Begriff herabzugleiten; er bleibt aber doch noch ruhig auf ihr liegen, ohne daß eine Kraft ihn zu halten braucht. **Parent**, der ihn zuerſt in den Mem. de l'acad. de Paris 1704 betrachtet hat, nennt ihn den **Winkel des Gleichgewichtes**; ſonſt pflegt man ihn auch wohl den **Ruhewinkel** zu nennen.

4. Da man den Ruhewinkel durch Verſuche finden kann, ſo veranlaßt dies eine Methode, die Reibungszahl λ zu beſtimmen: man erhält aber begreiflich auf dieſe Art nur den Werth von λ für die Friktion der Ruhe.

§. 321.

Aufgabe. Es bleibe alles wie im §. 319. unverändert; man ſucht, wie groß die Kraft V ſeyn müſſe, um nicht bloß den Körper im Gleichgewichte zu erhalten, ſondern auch deſſen Friktion zu überwinden; ſo daß durch die geringſte Verſtärkung derſelben der Körper zum Weichen gebracht würde.

Aufl. 1) Der Theil von ihr $V \text{ Cos } (I' - I)$ muß alſo in dieſem Falle größer ſeyn, als die Kraft $P \text{ Sin } I$, womit der Körper nach CI zu ſinken ſtrebt, und der Ueberſchuß $V \text{ Cos } (I' - I) - P \text{ Sin } I$ muß hinreichend ſeyn, um die Friktion, die aus dem ſenk-

rechten Drucke P Cos I' — V Sin (I' — I) entſpringt, aufheben zu können.

2) Man hat daher:

$$V \cdot \text{Cos}\,(I' - I) - P \,\text{Sin}\, I = \lambda P \,\text{Cos}\, I - \lambda V \,\text{Sin}\,(I' - I)$$

woraus $V = \frac{P\,(\text{Sin}\, I + \lambda\, \text{Cos}\, I)}{\text{Cos}\,(I' - I) + \lambda\, \text{Sin}\,(I' - I)}$ wird.

3) Für $I' = I$ bekommt man $V = P\,(\text{Sin}\, I + \lambda\, \text{Cos}\, I)$. Der Körper wird alſo durch jede mit der Fläche parallele Kraft im Gleichgewichte erhalten, die zwiſchen die Grenzen P (Sin I — λ Cos I) und P (Sin I + λ Cos I) fällt. Bey erſterer iſt der Körper im Begriff zu ſinken, bey letzterer zu ſteigen.

4) Für $I' = o$, wird $V = \frac{P\,(\text{Sin}\, I + \lambda\, \text{Cos}\, I)}{\text{Cos}\, I - \lambda\, \text{Sin}\, I}$

$$= \frac{P\,(\text{tang}\, I + \text{tang}\, \omega)}{1 - \text{tang}\, \omega\, \text{tang}\, I} = P \cdot \text{tang}\,(I + \omega).$$

Friktion bey der Schraube.

§. 322.

Bey der Schraube bewirkt die Friktion, eben ſo wie bey der ſchiefen Ebene, in dem zwiſchen Kraft und Laſt (§. 242.) gefundenen Verhältniſſe eine Aenderung in zwiefacher Hinſicht. Soll nemlich die Friktion vom Gewichte P überwunden werden, ſo iſt in den meiſten Fällen weit weniger Kraft nöthig, als die dortige Gleichung angiebt, um zu verhindern, daß das Gewicht niederſinke; ſoll ſie aber durch die Kraft ſelbſt überwunden werden, ſo muß dieſe bey weitem größer ſeyn.

Im erstern Falle entsteht aus dem Gewichte p
bendaselbst 5.) nach der Richtung OI die Kraft
ang (I — ω) (§. 320. 2.); folglich erhält man,
. 65. da alles Uebrige ungeändert bleibt: $2\pi Vf = \frac{\text{tang}(I-\omega)}{\text{tang } I}$

Im letztern Fal[l] übt das Gewicht p nach eben der
htung den Widerstand p tang (I + ω) aus; also
d hier: $2\pi Vf = \frac{Ph \text{ tang}(I+\omega)}{\text{tang } I}$.

Es bleibt jetzt noch der Winkel I zu bestimmen
ig, den man auf folgende Art findet:

In der Ecke bey M, die an MO rechtwinklicht
hat man die Proportion:

I : tang I = Sin OMT : tang NMO
= Sin λ : tang ϑ

ner, in der Ecke bey T, die an TO rechtwinklicht ist:

I : tang I = Sin MTO : tang NTO
= Cos λ : tang α

sere Proportion giebt: Sin λ^2 tang I^2 = tang ϑ^2
letztere: Cos λ^2 tang I^2 = tang α^2
folglich wird: tang I^2 = tang α^2 + tang ϑ^2
und tang I = $\sqrt{(\text{tang } \alpha^2 + \text{tang } \vartheta^2)}$.

§. 323.

Folgerung. 1. Bey viereckigen Schraubengän
(§. 240. 2.) ist ϑ = 0, also tang I = tang α =
, folglich

der kleinere Werth von $V = \frac{Pr(h - 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r + \lambda h)}$

der größere $= \frac{Pr(h - 2\pi\lambda r)}{f(2\pi r - \lambda h)}$

2. Für $V = 0$, wird $I = \alpha$, folglich tang $I =$ tang α, oder $\sqrt{\text{tang } x^2 - \text{tang } \alpha^2} = \lambda$. So lange also tang $x^2 +$ tang α^2 nicht größer als λ^2 ist, bewirkt die Friktion, ohne Beyhülfe einer Kraft, allein schon den Stillstand der Schraube; das Gewicht P mag so groß seyn, als man will.

3. Sind die Schraubengänge viereckig, so ist ihre größte Schiefe, bey der noch die Friktion dem Gewichte Widerstand leistet $= \alpha$; also z. B. für $\lambda = \frac{1}{4}$ tang $\alpha = 0{,}25$, $\alpha = 14°$.

Friktion eines Seiles, das sich um einen cylindrischen Körper schlägt.

§. 324

Fig. 15. **Aufgabe.** An einem Seile, das über den Umfang AyB eines cylindrischen Körpers gelegt ist, ziehen bey a und f zwey Kräfte P und Q nach den Tangenten Aa, Ff; man fragt, um wie vieles Q größer als P seyn könne, ohne daß das Gleichgewicht zwischen beyden aufgehoben, oder das Seil nach der Seite F hinüber gezogen werde.

Aufl. 1) Es sey an irgend einer Stelle y, wie im §. 172., die Spannung des Seiles $= T$; der Krümmungshalbmesser $= r$; so ist die Kraft, womit das

as Element $yy' = ds$ ſenkrecht gegen die Fläche gerückt wird, (ebendaſ.) $= \frac{Tds}{r}$; alſo die Friktion, die ieſes Druckes wegen zu überwinden iſt, $= \frac{\lambda T ds}{r}$.

2) Um ſo viel kann daher die Spannung des folenden Elementes $y'y''$ größer als T ſeyn, ohne daß as Gleichgewicht zwiſchen beyden geſtört wird, oder nan hat: $dT = \frac{\lambda T ds}{r}$.

3) Wird die Amplitude des Bogens $Ay = \phi$ geſetzt, ſo iſt $r = \frac{ds}{d\phi}$, $d\phi = \frac{ds}{r}$; alſo $dT = \lambda T d\phi$; $\frac{dT}{T} = \lambda d\phi$; wovon das Integral: log nat. $T = \lambda\phi + C$ iſt.

4) Für $\phi = o$, iſt $T = P$, folglich $\log T = \lambda\phi + \log P$, oder $\log : \frac{T}{P} = \lambda\phi$; daher $T = P \cdot e^{\lambda\phi}$.

5) Nennt man die Amplitude des Bogens AF; d. i. den Winkel AOF, den die beyden Normalen AO und FO mit einander machen, $= \alpha$, ſo iſt für $\phi = \alpha$; $T = Q$; alſo $Q = P \cdot e^{\lambda\alpha}$.

6) Man kann auch das Verhältniß der Kräfte P und Q durch den Winkel $AIF = \gamma$ beſtimmen, den ihre Richtungen aAI und fFI miteinander einſchließen. Da nemlich im Vierecke AOFI ſowol IAO als IFO $= 90°$ iſt, ſo iſt $\alpha = 180° - \gamma$, alſo $Q = P \cdot e^{\lambda(\pi - \gamma)}$

§. 325.

Folgerung 1. Der Widerstand von Seiten der Friktion wächst demnach in einem geometrischen Verhältnisse, wenn die Amplitude des Bogens, den das Seil auf dem Umfange des cylindrischen Körpers umschließt, im arithmetischen Verhältnisse zunimmt.

Euler Novi Comment. acad. sc. Petrop. Tom. XX. pag. 304.

Belidor arch. hydraul. Tom. I. pag. 113.

2. Für den Bogen $AyB = 180^\circ$, wobey die Richtungen Aa, Bb der beyden Kräfte parallel werden, hat man $Q = P \cdot e^{\lambda\pi}$. Nimmt man also z. B. $\lambda = \frac{1}{3}$ an, so wird

$$\log Q = \log P + \tfrac{1}{3}\pi \log e. \quad \text{Nun ist}$$

$$le = 0{,}43429448$$

$$\tfrac{1}{3}\pi = 1{,}0471975$$

$$\tfrac{1}{3}\pi\, le = 0{,}4547921$$

$$e^{\lambda\pi} = 2{,}849653$$

folglich: $Q = 2{,}849653 \cdot P$

3. Geht das Seil ganz um den Cylinder herum, so ist $Q = P \cdot e^{2\lambda\pi}$; und ist es n mal um ihn herumgeschlagen; $Q = P \cdot e^{2n\lambda\pi}$; man würde also z. B. für $n = 3$ nach voriger Rechnung $Q = 535\frac{1}{2}\, P$ erhalten.

Bey mehrern Umwindungen kann daher Q sehr beträchtlich werden, selbst wenn das herabhängende Stück Aa keine fremde Last trägt, sondern bloß durch sein eigenes Gewicht gespannt wird.

Friktion der Zapfen in den Pfannen.

§. 326.

86. Aufgabe. Am Umfange der Welle BGE
ist eine gegebene Last P nach der Tangente Bβ; man
sucht die Kraft V, die am Endpunkte A des Hebelar-
mes AO nach senkrechter Richtung Aα angebracht, ihr
mit Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerstand
hebt, der durch das Reiben des Zapfens aDb in der
Pfanne FID bewirkt wird.

Aufl. 1) Die beyden Kräfte V und P drücken ge-
meinschaftlich den Zapfen bey D gegen den innern Um-
fang der Pfanne, und zwar eben so, als wenn sie nach
parallelen Richtungen auf den Punkt D unmittelbar
gebracht wären (§. 69.); setzt man also den Win-
kel, den ihre Richtungen Aα und Bβ zusammen ein-
schließen, $= \gamma$, so entsteht aus beyden der mittlere
Druck $\Pi = \sqrt{(V^2 + 2VP \cos\gamma + P^2)}$ (§. 50.).

2) Wäre der Zapfen keiner Reibung unterwor-
fen, so müßte die Richtung dieses Drucks durch seinen
Mittelpunkt O gehen, oder auf der Tangente Dt, die
den Umfänge des Zapfens und der Pfanne am Berüh-
rungspunkte D mit einander gemein haben, senkrecht
stehen: aber wegen des Reibens kann der Druck nach ei-
ner schiefen Richtung Dr geschehen, ohne daß der Zap-
fen aus dem Gleichgewichte kommt. Wie groß die
Abweichung eDr von der senkrechten Richtung Dr seyn
darfe, läßt sich so bestimmen:

3) Man setze eDr $= \omega$, so entspringt aus dem

Drucke Π der ſenkrechte nach Dr = Π Cos ω, und ein anderer nach der Tangente Dt = Π Sin ω. Letztere Kraft ſtrebt den Zapfen nach Dt fortzuſchieben; erſtere verurſacht nach entgegengeſetzter Richtung den Widerſtand = λΠ Cos ω; ſoll alſo dieſer aufgehoben werden, ſo muß Π Sin ω = λΠ Cos ω, folglich tang ω = λ ſeyn.

4) Es widerſtehen demnach der Kraft V an den Hebelarmen OB und OD die beyden Kräfte P und λP Cos ω, die eine Umdrehung um O nach entgegengeſetzter Seite zu bewirken ſuchen. Wird alſo AO = f, OB = r, OD = e geſetzt, ſo erhält man für das Gleichgewicht:

$$Vf = Pr + \lambda e\Pi \operatorname{Cos} \omega = Pr + e\Pi \operatorname{Sin} \omega;$$ oder, wenn man für Π ſeinen Werth aus (1) ſubſtituirt:

$$Vf = Pr + e \operatorname{Sin} \omega \sqrt{(V^2 + 2VP \operatorname{Cos} \gamma + P^2)}$$

woraus folgende quadratiſche Gleichung entſteht:

$$V^2 - \frac{2VP(fr + e^2 \operatorname{Sin} \omega^2 \operatorname{Cos} \gamma)}{f^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2} + \frac{P^2(r^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2)}{f^2 - e^2 \operatorname{Sin} \omega^2} = 0.$$

5) Sind die Richtungen Aα und Bβ parallel, ſo iſt γ = o, Cos γ = 1, alſo:

$$Vf = Pr + e \operatorname{Sin} \omega (V + P)$$

$$\text{oder } V = \frac{P(r + e \operatorname{Sin} \omega)}{f - e \operatorname{Sin} \omega}.$$

§. 328.

Bey der Rolle hat man auf folgenden Unterſchied zu ſehen: entweder ſitzt der Bolzen an der Rolle feſt, und dreht ſich auf beyden Seiten in Pfannen, oder er iſt

an ſich unbeweglich, und geht in der Mitte durch eine Oeffnung der Rolle. Die Gleichung zwiſchen Kraft und Laſt iſt in beyden Fällen dieſelbe; da hier nemlich $f = r$ iſt, ſo erhält man:

$$V^2 - 2VP\left(\frac{r^2 + e^2 \operatorname{Sin}\omega^2 \operatorname{Cos}\gamma}{r^2 - e^2 \operatorname{Sin}\omega^2}\right) + P^2 = 0,$$

und wenn beyde nach parallelen Richtungen ziehen:

$$V = P\left(\frac{r + e \operatorname{Sin}\omega}{r - e \operatorname{Sin}\omega}\right);$$

nur bedeutet im erſtern Falle e den Halbmeſſer des Bolzen, und im andern, da die Umdrehung allemal um den Mittelpunkt der Rolle geſchieht, den Halbmeſſer der Oeffnung in der Rolle.

§. 329.

Der Unterſchied zwiſchen V und P wird bloß auf die Ueberwindung der Friktion verwandt: denn wenn keine Friktion ſtatt fände, ſo würde $V = P$ ſeyn müſſen. Man ſetze $V - P = p$, und dividire in der letztern Formel Zähler und Nenner wirklich in einander, ſo bekommt man:

$$V = P\left(1 + \frac{2e \operatorname{Sin}\omega}{r - e \operatorname{Sin}\omega}\right)$$

$$\text{alſo } P = \frac{2Pe \operatorname{Sin}\omega}{r - e \operatorname{Sin}\omega}.$$

§. 330.

Da das Reiben bey allen drehenden Bewegungen auf einerley Art geſchieht, ſo laſſen ſich darüber mit der

Rolle der einfachsten Versuche entstehen; ein Wolfs
p, den man durch einen Versuch gefunden hat, gi
nemlich gegenseitig:

$$\sin \omega = \frac{pr}{(2P + p)e}.$$

Eine Rolle von Guajacholz, die Herr Coulo
zu einem seiner Versuche gebrauchte, hatte 14 [illegible]
Durchmesser, und wog 14 ℔; ihr Bolzen, [illegible]
beweglich war, war von Eisen, und 19''' dick; [illegible]
betrug der Spielraum zwischen ihm und dem [illegible]
der Oeffnung 1¾'''. Man hat also hier $e =$ [illegible]
lich sehr nahe $\frac{r}{e} = 7$, und da das Gewicht der [illegible]
zu $2P + p$ hinzu kommt,

$$\sin \omega = \frac{7p}{2P + 2p + 14}.$$

Folgendes Täfelchen enthält Herrn Coulo
Angaben, nebst den daraus berechneten Werthen
$\sin \omega$:

P	p	$\sin \omega$
103	6	0,186
200	10½	0,148
400	21	0,151
	3	0,485

mittl. Werth von $\sin \omega = 0,162$

Ich füge hier noch einige Resultate seiner übri
Versuche bey:

1) Bey eisernen Axen, die sich auf kupfern

Zapfenlagern drehen, iſt Sin $\omega = \frac{1}{6}$, und wenn Talg dazwiſchen gebracht wird, Sin $\omega = \frac{1}{11}$; Schmiere $= \frac{2}{17}$; Oel $= \frac{1}{8}$.

2) Das Reiben eiſerner Axen auf hölzernen Lagern iſt in den meiſten Fällen, wenn die Schmiere vortheilhaft gewählt wird, $= \frac{1}{26}$; beym Oele hingegen $= \frac{1}{8}$ und mehr, doch nie über $\frac{2}{17}$.

3) Beym Drehen eichener Axen auf Guajacholz, das mit Talg geſchmiert wird, iſt Sin $\omega = \frac{1}{26}$; auf Ulmenholz $= \frac{1}{33}$; und, wird der Talg wieder abgewiſcht, im erſtern Falle $= \frac{1}{17}$, im letztern $= \frac{1}{20}$.

4) Die Geſchwindigkeit hat in allen dieſen Fällen keinen Einfluß auf die Friktion.

§. 331.

Da ſich die Rolle bey ihrer Umdrehung an dem Seile, das über ihren Umfang geht, fortwälzt, ſo entſteht eigentlich auch dadurch eine Art von Reibung, die von der Kraft überwunden werden muß; indeß iſt dieſe ſicher zu gering, als daß ſie gegen das Reiben der Axe auf den Pfannen in Anſchlag käme. Bey weiten gröſſer iſt dagegen der Widerſtand, den das Seil durch ſeine Steifheit der Kraft entgegenſetzt: ſoll nemlich die Rolle ſich umdrehen, ſo muß von dem ſtraffen Seilſtücke, woran die Laſt hängt, ein Theil nach dem andern über ihren Umfang herumgebogen werden, und dazu iſt allemal eine gewiſſe Kraft nöthig, die deſto gröſſer ſeyn muß, je weniger das Seil Biegſamkeit beſitzt.

Nach Amonton's Verſuchen *) verhält ſich die Kraft, die zur Biegung eines Seiles erfordert wird, direkt wie ſeine Dicke und Spannung, und verkehrt wie der Krümmungshalbmeſſer. Aus Herrn Coulomb's Verſuchen hingegen läßt ſich auf kein beſtimmtes Verhältniß in Anſehung der Dicke des Seiles ſchließen; jedoch ſtimmt nachſtehende Formel mit den meiſten dieſer Verſuche, ſo viel es die Unregelmäßigkeit derſelben zuläßt, ziemlich genau überein;

$$w = \frac{c^{1,7}}{r} \cdot (2{,}45 + 0{,}053\, t)$$ **)

worin c die Dicke des Seiles in Linien ausgedrückt, t ſeine Spannung, r den Halbmeſſer der Rolle oder der Welle ebenfalls in Linien, und w die Kraft bedeutet, die auf die Biegung des Seiles verwandt wird.

Exempel. Es ſey der Halbmeſſer der Rolle $r = 24'''$, $c = 9'''$, die Spannung $t = 625$ ℔, ſo hat man $c^{1,7} = 42$; $2{,}45 + 0{,}053\, t = 35{,}575$ ℔, alſo

$$w = \frac{42 \times 35{,}575}{24} = 62\tfrac{1}{4}\text{ ℔}.$$

§. 332.

Um dieſen Widerſtand zugleich mit in Rechnung zu bringen, ſetze man $w = \frac{G + gt}{r}$, und $\sin \omega = \lambda$, ſo wird (§. 327. 5.)

*) Mem. de l'acad. de Paris 1699.

**) Prony Nouvelle archit. hydraul. P. I. pag. 499.

$$Vf = Pr + \lambda e(V + P) + G + gP$$
$$V(f - \lambda e) = P(r + \lambda e + g) + G$$

folglich $V = \frac{(r + \lambda e + g)P + G}{f - \lambda e}$,

ud bey der Rolle:

$$V = \frac{(r + \lambda e + g)P + G}{r - \lambda e}$$

alſo p (§. 329.) $= \frac{(2\lambda e + g)P + G}{r - \lambda e}$

Exempel. Es ſey $P = 500$ ℔, $r = 72'''$, $= 18'''$, die Dicke des Seiles $c = 9'''$, ſo wird $G =$ 03 ℔, $g = 2{,}226$; folglich, wenn wir $\lambda = \frac{1}{6}$ ſetzen:

$$= \frac{4113 + 103}{72 - 3} = 61\tfrac{7}{69}\text{ ℔}.$$

§. 333.

Aufgabe. Beym Flaſchenzuge das genauere Verältniß zwiſchen Kraft und Laſt zu beſtimmen, wenn abey ſowol die Friktion, als die Steifheit der Seile in Beträcht gezogen werden ſoll.

Aufl. Es ſey die zu hebende Laſt $= P$; die raft, die ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den iderſtand beyderley Art überwindet, $= V$; die Anahl der Rollen in jeder Flaſche $= n$; ihr mittlerer albmeſſer $= r$, der Halbmeſſer ihrer Zapfen $= e$; ie Spannung des Seilſtücks, woran unmittelbar die raft zieht, $= t$; die der folgenden $= t', t'', t''' \ldots t^{(2n)}$, o hat man

1) $t = V$ und

$$t' + t'' + t''' \ldots + t^{(2n)} = P$$

2) Wegen gehabter Hinderniſſe geht von der Spannung des Seiles jedesmal, wenn es ſich um eine andere Rolle ſchlägt, ein Theil verloren, ſo daß die Werthe t, t', t'' u. ſ. w. eine abnehmende Reihe bilden. Es wird nemlich:

$$t = \frac{(r+\lambda e+g)t' + G}{r-\lambda e} \quad (\S.\ 332.)$$

oder gegenſeitig $t' = \frac{(r-\lambda e)t - G}{r+\lambda e+g}$

und auf gleiche Art: $t'' = \frac{(r-\lambda e)t' - G}{r+\lambda e+g}$ u. ſ. w.

3) Man ſubſtituire allemal den verlangten Ausdruck in den nächſtfolgenden, und ſetze der Kürze wegen $\frac{r-\lambda e}{r+\lambda e+g} = i$, $\frac{G}{r+\lambda e+g} = z$, ſo erhält man:

$t' = it - z$, $t'' = i^2t - (i+1)z$, $t''' = i^3t - (i^2+i+1)z$ u. ſ. w. oder:

$$t' = it - z$$

$$t'' = i^2t - \left(\frac{1-i^2}{1-i}\right)z$$

$$t''' = i^3t - \left(\frac{1-i^3}{1-i}\right)z \text{ u. ſ. w.}$$

$$t^{(2n)} = i^{2n}t - \left(\frac{i-i^{2n}}{i-i}\right)z$$

$$P = \frac{i(1-i^{2n})}{1-i} \cdot t - \left[\frac{2n}{1-i} - \frac{i(1-i^{2n})}{(1-i)^2}\right]z,$$

alſo $V = t = \frac{(1-i)}{i(1-i^{2n})} \cdot P + \left(\frac{2n}{i(1-i^{2n})} - \frac{1}{1-i}\right)z$

Friktion der Zapfen in den Pfannen.

§. 326.

Fig. 86. **Aufgabe.** Am Umfange der Welle BGE zieht eine gegebene Last P nach der Tangente Bβ; man sucht die Kraft V, die am Endpunkte A des Hebelarmes AO nach senkrechter Richtung Aα angebracht, ihr das Gleichgewicht hält, und zugleich den Widerstand aufhebt, der durch das Reiben des Zapfens aDb in der Pfanne FID bewirkt wird.

Aufl. 1) Die beyden Kräfte V und P drücken gemeinschaftlich den Zapfen bey D gegen den innern Umfang der Pfanne, und zwar eben so, als wenn sie nach parallelen Richtungen auf den Punkt D unmittelbar angebracht wären (§. 69.); setzt man also den Winkel, den ihre Richtungen Aα und Bβ zusammen einschließen, $= \gamma$, so entsteht aus beyden der mittlere Druck $\Pi = \sqrt{(V^2 + 2VP\cos\gamma + P^2)}$ (§. 50.).

2) Wäre der Zapfen keiner Reibung unterworfen, so müßte die Richtung dieses Drucks durch seinen Mittelpunkt O gehen, oder auf der Tangente Dt, die die Umfänge des Zapfens und der Pfanne am Berührungspunkte D mit einander gemein haben, senkrecht seyn: aber wegen des Reibens kann der Druck nach einer schiefen Richtung Dr geschehen, ohne daß der Zapfen aus dem Gleichgewichte kommt. Wie groß die Abweichung ϵDr von der senkrechten Richtung Dr seyn dürfe, läßt sich so bestimmen:

3) Man setze $\epsilon Dr = \omega$, so entspringt aus dem

Man nenne die Laſt, die den Arm OB durch ſein eigenes Gewicht aufwiegt, $= H$, ſo erhält man für $V = o$:

$$H(a + \lambda e) - G(g - \lambda e) = o$$

$$\text{alſo } G = \frac{H(a + \lambda e)}{g - \lambda e}$$

Dieſer Werth für G, in voriger Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$V(f - \lambda e) = (P - H)(a + \lambda e).$$

§. 335.

Bey der gleicharmigen Wage iſt $g = o$, $f = a$, alſo:

$$Va = Pa + \lambda e (V + P + G)$$

oder, wenn man $V - P = p$ ſetzt:

$$pa = \lambda e (2P + p + G),$$

$$p(a - \lambda e) = \lambda e (2P + G);$$

$$\text{daher } p = \frac{\lambda e (2P + G)}{a - \lambda e}.$$

Da von einer genauen Wage gefordert wird, daß ſie den geringſten Unterſchied zwiſchen den Gewichten anzeigen ſoll, ſo muß man bey ihr den Einfluß der Friktion, ſo viel, als ſich thun läßt, zu vermindern ſuchen. Dies geſchieht, wie die Formel zeigt:

1) dadurch, daß der Zapfen eine ſehr geringe Dicke bekommt; doch muß er Stärke genug behalten, um die Laſt $2P + G$, die auf ihm ruhet, tragen zu können. Man findet deshalb an ſehr feinen Wagen zuweilen prismatiſche Zapfen, die auf der innern Kante der Oeffnungen in der Schwere mit der ſchärfſten Spitze

2) Indem man die Arme ſo lang und dabey ſo
ht macht, als ohne die Gefahr, daß ſie bey gröſsern
wichten ſich biegen könnten, geſchehen darf. Wegen
erer Rückſicht beſteht der Wageballen bey den Rems-
ſchen Wagen aus zweyen hohlen Kegeln, die am
hepunkte mit ihren Grundflächen zuſammenſtoßen.

Friktion bey ſtehender Welle.

§. 336.

87. **Aufgabe.** Eine cylindriſche Welle, deren
wicht = P iſt, ruhet mit ihrer Grundfläche DGEB
f horizontalem Boden, und iſt um die vertikale Axe
beglich, die durch ihren Mittelpunkt O geht; man
gt, wie viel Kraft an den Endpunkt F des Hebelar-
s OF nach ſenkrechter Richtung Ff angebracht wer-
n muß, um die Friktion zwiſchen der Grundfläche
d den Boden aufzuheben.

Aufl. 1) Wir wollen ſetzen, eine Vertikale aus
n Schwerpunkte der Welle treffe die Grundfläche in
ſo vertheilt ſich der Druck P auf ihr gleichförmig
158.); ſetzt man daher ihren Halbmeſſer = e, ſo
$\pi\varrho$ ihr Inhalt, folglich $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ die Einheit des Druckes,
wir = $\varkappa$ ſetzen wollen.

2) Es kommt alſo auf den unendlich ſchmalen
ng, der von O allenthalben um OI = Z abſteht,
d die Breite Ii = dz hat, vom ganzen Drucke der
eil $2\pi\varkappa z dz$, und die Friktion, die dadurch entſteht,
= $2\pi\lambda\varkappa z dz$.

Man nenne die Last, [illegible] in einer Entfernung [illegible] eigenes Gewicht aufwiegt [illegible] muß, so ist am Hebelarm $V = o$: [illegible] $\pi\lambda\varkappa z\,dz$, und die Summe [illegible]

$H(a + \lambda e) -$ [illegible] einzelnen Ringen, aus den [illegible]

also $G = \frac{H}{\text{Hebel}} = \int 2\pi\lambda\varkappa z^2 dz = \frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa$ [illegible]

[illegible] für $z = e$, $= \frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa e^3$ wird.

Dieser Werth für G [illegible] nach M die gesuchte Kraft, f [illegible] giebt:

$V(f -$ [illegible] armes OF, so hat man:

[illegible] $\frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa e^3$, oder wenn man für $\varkappa$ sein[illegible]

Bey [illegible] (1): $Mf = \frac{2}{3}\lambda eP$.

§. 337.

[illegible] 1. Wenn die Welle unten auf einem dün[illegible] [illegible]fen läuft, so trägt dieser ihr ganzes Gewicht [illegible] auf seiner Grundfläche gleichförmig vertheilt [illegible] bedeutet c in dem Falle den Halbmesser de[illegible] [illegible] und die Dicke der Welle kommt dabey weite[illegible] [illegible] in Betracht; alles Uebrige aber bleibt in de[illegible] [illegible] ungeändert.

[illegible] Da die Kraft M von der Friktion aufgehobe[illegible] [illegible] leidet der Zapfen keinen Seitendruck, als[illegible] [illegible] keine Friktion, als die an der Grundfläche [illegible] Fall tritt aber ein, wofern die Welle unter i[illegible] [illegible] Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt wird [illegible] M' den Theil von M, der alsdann auf di[illegible] [illegible] an der Grundfläche des Zapfen, und M'' de[illegible] [illegible] der auf die Seitenfriktion verwandt wird, s[illegible] [illegible]: $M'f = \frac{2}{3}\lambda eP \cos d$, und wenn man di[illegible]

iktionszahl der drehenden Bewegung λ' nennt:

$M''f = \lambda' e (M'' + P \sin \vartheta)$ (§. 327. 5.)

$$M'' = \frac{\lambda' e P \sin \vartheta}{f - \lambda' e};$$

glich wird $M = M' + M'' = \frac{2\lambda e P \cos \vartheta}{3f} +$

$\frac{P \sin \vartheta}{- \lambda' e}$; oder, wenn wir $\lambda' = \lambda$ ſetzen, und im

nner des zweyten Theiles $\lambda' e$ als unbedeutend gegen

eglaſſen: $M = \frac{\lambda e P}{f} (\frac{2}{3} \cos \vartheta + \sin \vartheta)$.

3. Das Differenzial des eingeſchloſſenen Faktors $= (\cos \vartheta - \frac{2}{3} \sin \vartheta) d\vartheta$; alſo poſitiv, ſo lange $\vartheta < \frac{2}{3}$ iſt, und negativ, ſo bald tang $\vartheta < \frac{2}{3}$ wird. her wird die Friktion Anfangs mit zunehmender hräge der Axe größer; erreicht für $\vartheta = 56°18'$ ein aximum, und nimmt dann wieder ab, ſo wie ſich Axe mehr der horizontalen Lage nähert.

4. Hierin liegt vorzüglich der Grund, warum nche Uhren nur in horizontaler Lage richtig gehen, wenn ſie aufgehängt, oder in irgend eine andere e gebracht werden, um ein merkliches zurückbleiben.

5. Da der Zapfen in vertikaler Lage nach Verhältniß ſeiner Dicke weit mehr tragen kann, als in horizontaler Lage, ſo kann bey einerley Druck ſein Halbmeſſer e im erſtern Falle viel kleiner ſeyn, als im letztern; alſo hat auch in dieſer Rückſicht die vertikale Welle vor der horizontalen den Vorzug.

[illegible] Räderwerke.

§. 338.

Im §. 229 u. f. ist gezeigt, daß bey einer angemessenen Form der Zähne die Kraft M am Umfange jederzeit einer gleich großen Kraft am Umfange des Durchgreifenden Getriebes im Gleichgewichte erhalten werde. Soll nun letztere Kraft das Rad wirklich in Bewegung setzen, so muß sie, um Theils die Friktion an den zusammenstoßenden Zähnen, theils die an den Axen zu überwinden, offenbar größer als M seyn; das letzteres Hinderniß nach §. 326 leicht bestimmt werden kann: so wollen wir dieß suchen, wieviel von ihr auf die Ueberwindung der Friktion an den Zähnen verwendet wird.

§. 339.

Fig. 54. Man setze diese Kraft = m; den gegenseitigen Druck, den die Zähne senkrecht aufeinander, oder nach der Normale MO ausüben, = N; so bewirkt dieser die Friktion = λN, deren Richtung nach der Tangente uMt geht, die die beyden Zähne am Punkte M ihres Zusammenstoßens mit einander gemein haben.

Man zerlege den Widerstand λN in eine Kraft nach CM = λN Cos uMC = λN Sin CMO, und in eine nach der darauf senkrechten Richtung Mm = λN Sin uMC = λN Cos CMO; erstere wirkt auf den festen Punkt C, und wird also aufgehoben; letzterer, die

am

im Hebelarme MC das Moment MC . λN Cos CMO hat, iſt am Endpunkte O des Halbmeſſers OC die Kraft $\frac{MC}{OC}$. λN Cos CMO äquivalent, und da dieſe unmittelbar der Kraft m entgegenwirkt, ſo hat man

$$m = \frac{MC}{OC} . \lambda N \text{ Cos } CMO.$$

Nun iſt $N = \frac{M}{\text{Sin } MOC}$ (S. 217.) und

MC : OC = Sin MOC : Sin CMO, folglich wird

$$m = \frac{\lambda M \text{ Cos } CMO}{\text{Sin } CMO} = \lambda M \text{ Cot. } CMO.$$

Die Friktion iſt alſo während der Zeit, daß zwey Zähne aneinander fortgleiten, beſtändigen Aenderungen unterworfen, und hängt jedesmal von dem Winkel MCO ab, um den ſich der Halbmeſſer MC von der Mittelpunktslinie CD entfernt hat. Man ſetze dieſen Winkel = φ, ſo erhält man im Dreyecke MCO : tang

$$CMO = \frac{OC \text{ Sin } \varphi}{MC - OC \text{ Cos } \varphi}$$

Da der Halbmeſſer MC von OC höchſtens um die Länge des Zahns, oder den Halbmeſſer des Triebſtocks verſchieden ſeyn kann, ſo darf man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, MC = OC ſetzen; dadurch wird tang $CMO = \frac{\text{Sin } \varphi}{1 - \text{Cos } \varphi} = \frac{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi \text{ Cos } \frac{1}{2}\varphi}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi^2}$

$= \text{Cot } \frac{1}{2}\varphi$, alſo endlich:

$$m = \lambda M \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varphi$$

2) Wegen gehöriger Hindernisse geht von der Spannung des Seiles jedesmal, wenn es sich um eine andere Rolle schlägt, ein Theil verloren, so daß die Werthe t, t', t'' u. s. w. eine abnehmende Reihe bilden. Es wird nemlich:

$$t = \frac{(r+\lambda e+g)t'+G}{r-\lambda e} \text{ (§. 232.)}$$

oder gegenseitig $t' = \frac{(r-\lambda e)t-G}{r+\lambda e+g}$

und auf gleiche Art: $t'' = \frac{(r-\lambda e)t'-G}{r+\lambda e+g}$ u. s. w.

3) Man substituire allemal den vorhergehenden Ausdruck in den nächstfolgenden, und setze der Kürze wegen $\frac{r-\lambda e}{r+\lambda e+g} = i$, $\frac{G}{r+\lambda e+g} = z$, so erhält man:

$t' = it - z$, $t'' = i^2 t - (i+1)z$, $t''' = i^3 t - (i^2+i+1)z$ u. s. w. oder:

$$t' = it - z$$

$$t'' = i^2 t - \left(\frac{1-i^2}{1-i}\right)z$$

$$t''' = i^3 t - \left(\frac{1-i^3}{1-i}\right)z \text{ u. s. w.}$$

$$t^{(m)} = i^m t - \left(\frac{1-i^m}{1-i}\right)z$$

$$P = \frac{i(1-i^m)}{1-i}\cdot t - \left[\frac{2m}{1-i} - \frac{i(1-i^m)}{(1-i)^2}\right]z,$$

also $T = t = \frac{(1-i)}{i(1-i^m)}\cdot P - \left(\frac{2m}{i(1-i^m)} - \frac{1}{1-i}\right)z$

4) Setzt man $1-i=\frac{2\lambda e+g}{r-\lambda e+g}=x$, und

t die höhern Potenzen, ſo wird $1-i^{2n}=2nx$

$-(n-\frac{1}{2})x^2$, und $\frac{2n}{i(1-i^{2n})}-\frac{1}{1-i}=$

$\frac{1}{1-(n+\frac{1}{2})x}=\frac{1}{x}=(n+\frac{1}{2})$, folglich:

$$V=\frac{[1-n+\frac{1}{2})x]P}{2n}+(n+\frac{1}{2})x,$$

$$=\frac{P}{2n}+(n+\frac{1}{2})\cdot(\frac{Px}{2n}+x)$$

$$=\frac{P}{2n}+\frac{2n+1}{4n}\cdot\left[\frac{(2\lambda e+g)P+2nG}{r+\lambda e+g}\right]$$

Friktion bey der Waage.

§. 534.

Es ſey an der Schnellwage AOB

der kürzere Arm AO . . .	=	a
die in A aufgehängte Laſt . .	=	P
das Laufgewicht . . .	=	V
ſeine Entfernung OF vom Ruhepunkt	=	f
das Gewicht des ganzen Wagebalken	=	G
die Entfernung ſeines Schwerp. von O	=	g
der Halbm. des Zapfen, um den er ſich dreht	=	e

wird nach §. 327.

$$Vf+Gg=Pa+\lambda e(V+P+G)$$

oder $V(f-\lambda e)=P(a+\lambda e)-G(g-\lambda e)$.

dem man die Arme so lang und dabey so
als ohne die Gefahr, daß sie bey größern
ich biegen könnten, geschehen darf. Wegen
sicht berichtet der Wagebalken bey den Arms-
Hagen aus zweyen hohlen Kegeln, die am
mit ihren Grundflächen zusammenstoßen.

riktion bey stehender Welle.

§. 336.

ufgabe. Eine cylindrische Welle, deren
: P ist, ruhet mit ihrer Grundfläche DGEB
italem Boden, und ist um die vertikale Axe
die durch ihren Mittelpunkt O geht; man
viel Kraft an den Endpunkt F des Hebelar-
lach senkrechter Richtung Ff angebracht wer-
um die Friktion zwischen der Grundfläche
Boden aufzuheben.

1) Wir wollen setzen, eine Vertikale aus
derpunkte der Welle treffe die Grundfläche in
theilt sich der Druck P auf ihr gleichförmig
; setzt man daher ihren Halbmesser $= e$, so
Inhalt, folglich $\frac{P}{\pi e^2}$ die Einheit des Druckes,
e setzen wollen.

kommt also auf den unendlich schmalen
on O allenthalben um $Oi = z$ absteht,
ite $Ii = dz$ hat, vom ganzen Drucke der
z, und die Friktion, die dadurch entsteht,
dz.

3) Da dieſer Widerſtand in einer Entfernung von O = Z überwunden werden muß, ſo iſt am Hebelarme OIF ſein Moment = $2\pi\lambda\varkappa z\,dz$, und die Summe dieſer Momente von allen einzelnen Ringen, aus denen die Grundfläche beſteht, = $\int 2\pi\lambda\varkappa z^2 dz = \frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa z^3$; welches Integral für $z = e$, = $\frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa e^3$ wird.

4) Heißt demnach M die geſuchte Kraft, f die Länge des Hebelarmes OF, ſo hat man:

$Mf = \frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa e^3$; oder wenn man für $\varkappa$ ſeinen Werth $\frac{P}{\pi\varrho^2}$ ſetzt (1): $Mf = \frac{2}{3}\lambda e P$.

§. 337.

Folg. 1. Wenn die Welle unten auf einem dünnern Zapfen läuft, ſo trägt dieſer ihr ganzes Gewicht, das ſich auf ſeiner Grundfläche gleichförmig vertheilt. Daher bedeutet c in dem Falle den Halbmeſſer des Zapfen, und die Dicke der Welle kommt dabey weiter gar nicht in Betracht; alles Uebrige aber bleibt in der Formel ungeändert.

2. Da die Kraft M von der Friktion aufgehoben wird, ſo leidet der Zapfen keinen Seitendruck, alſo auch weiter keine Friktion, als die an der Grundfläche. Dieſer Fall tritt aber ein, wofern die Welle unter irgend einem Winkel ϑ gegen die Vertikale geneigt wird: man nenne M' den Theil von M, der alsdann auf die Friktion an der Grundfläche des Zapfen, und M'' den Theil, der auf die Seitenfriktion verwandt wird, ſo hat man: $M'f = \frac{2}{3}\lambda e P \cos\vartheta$, und wenn man die

[illegible]

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

folglich wird $[illegible] = [illegible] - [illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} - \frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] wird [illegible], und in Ansehung der zweyten Formel [illegible] [illegible]

[illegible]: $[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible]

[illegible]

3. Die Differenz des [illegible] ist $= [illegible]$ [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] Daher wird in diesem Falle die [illegible] Grösse [illegible] $= [illegible]$ das Maximum. [illegible] die Art wie [illegible]

4. Setzen wir [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] und wenn [illegible] aufgelöset, [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible]

5. Da [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$

Friktion beym Räderwerke.

§. 338.

Im §. 219 u. f. iſt gezeigt, daß bey einer angemeſſenen Form der Zähne die Kraft M am Umfange jederzeit von einer gleich großen Kroft am Umfange des dareingreifenden Getriebes im Gleichgewichte erhalten werde. Soll nun letztere Kraft das Rad wirklich in Bewegung ſetzen, ſo muß ſie, um Theils die Friktion an den zuſammenſtoßenden Zähnen, theils die an den Axen zu überwinden, offenbar größer als M ſeyn; da letzteres Hinderniß nach §. 326. leicht beſtimmt werden kann; ſo wollen wir bloß ſuchen, wieviel von ihr auf die Ueberwindung der Friktion an den Zähnen verwandt wird.

§. 339.

Fig. 54. Man ſetze dieſe Kraft = m; den gegenſeitigen Druck, den die Zähne ſenkrecht aufeinander, oder nach der Normale MO ausüben, = N; ſo bewirkt dieſer die Friktion = λN, deren Richtung nach der Tangente uMt geht, die die beyden Zähne am Punkte M ihres Zuſammenſtoßens mit einander gemein haben.

Man zerlege den Widerſtand λN in eine Kraft nach CM = λN Cos uMC λN Sin CMO, und in eine nach der darauf ſenkrechten Richtung Mm = λN Sin uMC = λN Cos CMO; erſtere wirkt auf den feſten Punkt C, und wird alſo aufgehoben; letzterer, die

am

m Hebelarme MC das Moment MG . λN Cos CMO hat, ist am Endpunkte O des Halbmessers OC die Kraft $\frac{MG}{OC}$. λN Cos CMO äquipollent, und da diese unmittelbar der Kraft m entgegenwirkt, so hat man

$$m = \frac{MC}{OC} . \lambda N \text{ Cos } CMO.$$

Nun ist $N = \frac{M}{\text{Sin } MOC}$ (§. 217.) und

MC : OC = Sin MOC : Sin CMO, folglich wird

$$m = \frac{\lambda M \text{ Cos } CMO}{\text{Sin } CMO} = \lambda M \text{ Cot. } CMO.$$

Die Friktion ist also während der Zeit, daß zwey Zähne aneinander fortgleiten, beständigen Aenderungen unterworfen, und hängt jedesmal von dem Winkel MCO ab, um den sich der Halbmesser MC von der Mittelpunktslinie CD entfernt hat. Man setze diesen Winkel = φ, so erhält man im Dreyecke MCO : tang

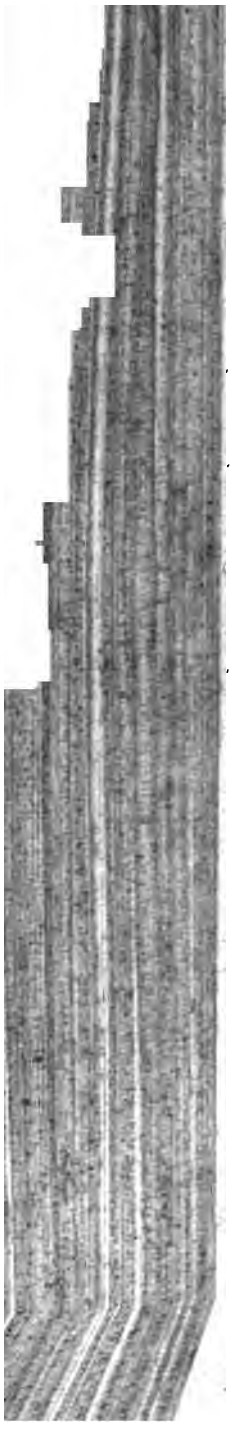
$$CMO = \frac{OC \text{ Sin } \varphi}{MC - OC \text{ Cos } \varphi}$$

Da der Halbmesser MC von OC höchstens um die Länge des Zahns, oder den Halbmesser des Triebstocks verschieden seyn kann, so darf man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, MC = OC setzen; dadurch

wird tang $CMO = \frac{\text{Sin } \varphi}{1 - \text{Cos } \varphi} = \frac{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi \text{ Cos } \frac{1}{2}\varphi}{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\varphi^2}$

= Cot $\frac{1}{2}\varphi$, also endlich:

$$m = \lambda M \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varphi$$



3) Da dieſer Widerſta
O = Z überwunden werden
OIF ſein Moment = $2\pi\lambda\varkappa z$
ſer Momente von allen ein
die Grundfläche beſteht, =
welches Integral für z = e,

4) Heißt demnach M
Länge des Hebelarmes OF, ſ
$Mf = \frac{2}{3}\pi\lambda\varkappa e^3$, oder
Werth $\frac{P}{\pi\rho^2}$ ſetzt (1): Mf =

§.

Folg. 1. Wenn die
nern Zapfen läuft, ſo
das ſich auf ſeiner Gr
Daher bedeutet c in
Zapfen, und die Dicke
gar nicht in Betracht;
Formel ungeändert.

2. Da die Kraft
wird, ſo leidet der
auch weiter keine Friktion
Dieſer Fall tritt
gend einem Winkel
man nenne M' den
Friktion an der
Theil, der auf
hat man: Mf' =

N C
s O C
da
hat ma

217.) und

in CMO, fol

M Cot. CMO

während der Zeit
...ten, beständig
... jedesmal ...
der Halbmesser MC
... hat. Wenn ...
... man im Dreyecke
...

$$\frac{\ldots}{\ldots}$$

... MC ...
... oder den Halbmesser
... ...
... zu bestehen ...

wird $\tan \ldots = \frac{\ldots}{1 - \ldots}$

$= \mathrm{Cot} \frac{1}{2} \ldots$

$m = \ldots$

Friktion beym Räd

§. 338.

Im §. 219 u. f. iſt gezeig
meſſenen Form der Zähne d
jederzeit von einer gleich gro
dareingreifenden Getriebes
werde. Soll nun letzter
Bewegung ſetzen, ſo muß
an den zuſammenſtoßende
Axen zu überwinden,
letzteres Hinderniß nach
kann; ſo wollen wir
die Ueberwindung
wandt wird.

Fig. 54. Man ſetze
gen Druck, den
nach der Norm
wirkt dieſer die
der Tangente
Punkte M ihre
mein haben.

nach CM
eine nach
Sin
ſten Punk

λ tang $\frac{1}{2}\varphi$), oder

$+ \lambda$ tang $\frac{1}{2}\varphi$)

...greifen mehrerer Räder in einander

... einen mittlern Werth $\varkappa$ anneh-

... erhält man für drey Räder: $V =$

$\lambda\varkappa)^2$.

§. 341.

... Getriebe in ein Kronrad eingreift, so

zu unterscheiden.

das Getriebe Zähne hat. Alsdann be-

Zähne beyder Räder beständig in einem

e OM, die auf CI senkrecht ist (§. 225.);

der Winkel CMO jedesmal $= 90° -$

$- \varphi$, also $m = \lambda M$ Cot CMO $= \lambda m$

folglich $M + m = M(1 + \lambda$ tang $\varphi)$.

Triebstöcken hingegen geschieht die Be-

nal in der Sehne MO, die den Winkel

§. 235.); folglich ist in diesem Falle wie-

$90° - \frac{1}{2}$ MCN, also $m = \lambda M$ tang $\frac{1}{2}\varphi$.

§. 342.

...fgabe. Es sey das Gewicht des Stem-

...er vermittelst des Daumen FM gehoben

$= P$; man fragt, um wieviel die Kraft

...fange der Welle OFK größer seyn müsse,

mithin die ganze Kraft am Ger

$$M + m = M\ (1$$

Exempel. Für 20

die größte Abweichung

0,1583845, und wenn

0,0527948 M, M +

nahe $= \frac{20}{19}$ M.

Anmerk. Nach Beiwort

Falle (eigentlich

dem eben gefunde

Beträchtlicher

meinigen a

sich dabey

dient hat,

scheint.

ist der gesa

unmittelbar

$$= P + \frac{2\lambda f P'}{a}.$$

Au

OGB hä

diesem entspringt

auf

$$\left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right),$$ der

muß

halten

sie in eine Kraft na

wund

M und in eine darauf

Erstere ist $= \lambda\ (P$

am Mittelpunkte C au

$$\frac{2\lambda f P'}{a}) \sin DM$$

auf CO die Kraft

$$M = \lambda\left(P + \frac{2\lambda f P'}{a}\right) \tang$$

also CMO = Φ, so wird:

$$\ldots + \lambda P + \frac{2\lambda f P'}{a}) \text{ tang } \Phi$$

$$\ldots + \frac{2\lambda f P'}{a}) (1 + \lambda \text{ tang } \Phi)$$

$$P' \left(1 - \frac{2\lambda f}{a} - \frac{2\lambda^2 f \text{ tang } \Phi}{a}\right) = P$$

$\text{tang } \Phi$, und, wenn man $\lambda^2 \text{ tang } \Phi$ gegen λ

$$= \frac{aP(1 + \lambda \text{ tang } \Phi)}{a - 2\lambda f}$$

Es sey noch die Höhe OM, zu der der Stem- en wird, = h, der Halbmesser der Welle so hat man $h = r \text{ tang } \Phi$; also wird der Werth, den P' annehmen kann, $= \frac{aP(r + \lambda h)}{r(a - 2\lambda f)}$.

§. 343.

bleibt jetzt noch übrig, den Einfluß der Frik- der Schraube ohne Ende zu bestimmen, die in le eines daranliegenden Rades eingreift.

die Last P (§. 250.) durch den Zahn des Ra- Widerstand $= \frac{Pr}{R}$ gegen den daranstoßenden. engang parallel mit der Axe ausübt (§. 249. die Gänge der Schraube allemal viereckig sind .2.), so hat man, wenn man den Halbmesser bei ϱ nennt: $V = \frac{\varrho Pr \cdot h + 2\pi\lambda\varrho)}{Rf(2\pi\varrho - \lambda h)}$ (§. 323.)

damit sowohl die [illegible]
dem Daumen, als [illegible]
gen Ee und G[illegible]

Aufl [illegible]
mit Inbegriff [illegible] der S
$= f$, die [illegible] deren S
Punkt O [illegible]
muß $= \pi P$ [illegible] Wink
[illegible] auf die
E [illegible] $\frac{\ldots i)^2 P^2 r^2}{R^2}$
[illegible]
[illegible] ihrem Zap
[illegible] entsteht.
[illegible] Kraft wirkt,
[illegible] man den Halbm
[illegible] $\frac{\ldots P}{R} \sqrt{(1 + \frac{(\ldots}{\ldots}}$
[illegible] demnach:
[illegible] $\frac{(1+i)^2 r^2}{R^2}) =$
[illegible] $\frac{(1+i)^2 r^2}{R^2}) =$
[illegible] beynahe $= \frac{\lambda e}{r}$, und
[illegible] unter dem Wurzelzeichen
[illegible] man genauer:
[illegible] $1 + \frac{\lambda e}{r} \sqrt{(1 + \frac{(r}{\ldots}}$

Um zugleich die Friktion an der Ax
tracht zu ziehen, wollen wir den ge
nehmen, die Schraube habe ein
Man ſetze nun, ſtatt V ſey jetzt di
nöthig, ſo iſt die Rückwirkung de
Zahn $= \frac{(1+i)Pr}{R}$, und da der
Richtung der Laſt einen rechten W
wirken beyde in Verbindung auf
den Druck $\sqrt{(P^2 + (\frac{(1+i)^2 P^2 r^2}{R^2}}$
$\frac{(1+i)^2 r^2}{R^2})$, wodurch an ihrem
$\lambda P\sqrt{(1 + \frac{(1+i)^2 r^2}{R^2})}$ entſt

Da dieſe als Hebelkraft
am Punkte o, wenn man de
$= e$ ſetzt, die Kraft $\frac{\lambda eP}{R}\sqrt{}$
tuiren; man erhält demnach

$$\frac{Pr}{R} + \frac{\lambda eP}{R}\sqrt{(1 + \frac{(1}{}}$$

$$1 + \frac{\lambda e}{r}\sqrt{(1 + \frac{(1}{}}$$

Es iſt alſo i beynah
mit dem i, das unter de
ſelt, ſo bekommt man

$$1 + i = 1 -$$

wälzende zu verwandeln. So bedient man sich z. B. zur Fortschaffung großer Lasten auf horizontalem Boden mit vielem Vortheile der Walzen; diese werden nemlich der Last untergelegt, und vermittelst durchgesteckter Hebelarme zum Fortrollen gebracht, wodurch die Last wegen der ungleich größern Friktion der gleitenden Bewegung zugleich mit fortgezogen wird.

Fig. 90. Man setze nun, auf einer dieser Walzen DEB ruhe das Gewicht P, und am Hebelarme FC, dessen Länge wir $= f$ setzen wollen, sey nach senkrechter Richtung Ff die Kraft w angebracht; außerdem sey der Halbmesser der Walze $= a$, und der Winkel, den FC mit der Vertikale CL macht, $= \vartheta$, so zerfällt

1) die Kraft w in eine nach der Vertikale $Fo = w \cos fFo = w \sin \vartheta$, und in eine nach der Horizontale $Fl = w \cos \vartheta$.

2) Erstere hat am Hebelarme $HB = oC$ das Moment $oC . w \sin \vartheta = FC . w \sin \vartheta^2 = fw \sin \vartheta^2$; letztere am Hebelarme $LB = LC + CB = f \cos \vartheta + a$ das Moment $fw \cos \vartheta^2 + aw \cos \vartheta$.

3) Beyde Kräfte müssen am Winkelhebel HBL der Kraft p nach CE (§. 344.) das Gleichgewicht halten, also ihre Momente zusammen genommen dem Momente pa gleich seyn. Dies giebt:

$$wf + wa \cos \vartheta = pa = \mu P;$$

$$w = \frac{\mu P}{f + a \cos \vartheta}$$

4) Da aber auch die Friktion an der obern Fläche bey A überwunden werden muß, an der die Walze

Es sey der Winkel GEA, den die schräge Richtung GE der Stütze mit der Vertikale EA macht, $= \eta$, der Widerstand nach vertikaler Richtung $=$ S; die Kraft, die auf den Hebelarm fc senkrecht wirken muß, um ihm das Gleichgewicht zu halten, und zugleich die Friktion zu überwinden, $=$ M; die Länge von fc $=$ f; der Halbmesser der Walze $=$ a. Man zerlege nun:

1) die Kraft S in eine nach EG, und in eine nach Ee, senkrecht auf die vertikale Wand EA, so ist erstere $= \frac{S}{\text{Cos } \eta}$, und letztere, die durch die Festigkeit der Wand aufgehoben wird, $=$ S tang η.

2) Die Kraft $\frac{S}{\text{Cos } \eta}$ zerlege man ferner in eine horizontale $= \frac{S \text{ Sin } \eta}{\text{Cos } \eta} =$ S tang η, und in eine vertikale $= \frac{S \text{ Cos } \eta}{\text{Cos } \eta} =$ S'.

3) Erstere hat am Hebelarme ab $=$ 2a das Moment 2aS tang η; letztere bringt durch den Druck auf die Walze das Moment der Friktion $2\mu S$ hervor (§. 346.); also hat man:

$$Mf = (2a \text{ tang } \eta + 2\mu) S.$$

4) Da μ etwa $= \frac{1}{40}$ ist, so erhellet, daß 2μ gegen 2a tang η, worin a durch Zolle ausgedrückt werden muß (§. 344.), nicht in Betracht komme. Bedeutender ist dafür die Friktion bey E, die man so findet:

Der Kraft M ist am Punkte a, nach senkrechter Richtung auf ab die Kraft $\frac{Mf}{2a}$ äquipollent; man zer-

lege sie in eine nach der Vertikale, und in eine nach EG, so ist erstere $= \frac{Mf}{2a} \cdot \text{tang EGD}$, die gegen den Boden drückt, und dadurch aufgehoben wird; letztere $= \frac{Mf}{2a \text{ Cos EGD}} = \frac{Mf}{2a \text{ Sin } \eta}$. Diese zerfällt noch in eine vertikale $= \frac{Mf \text{ Cos } \eta}{2a \text{ Sin } \eta} = \frac{Mf}{2a \text{ tang } \eta}$, und in eine horizontale nach $Ee = \frac{Mf \text{ Sin } \eta}{2a \text{ Sin } \eta} = \frac{Mf}{2a}$, wodurch die Friktion $\frac{\lambda Mf}{2a}$ entsteht; man hat also: $\frac{Mf}{2a \text{ tang } \eta} = S + \frac{\lambda Mf}{2a}$, folglich:

$$Mf = \frac{2aS \text{ tang } \eta}{1 - \lambda \text{ tang } \eta}.$$

5) Ruhet nun der Block BD auf n Walzen, und ist auf jeder Seite derselben ein Hebelarm durchgesteckt, so wird dadurch die Kraft M in 2n Theile getheilt.

§. 348.

Die Friktion allein muß hier bewirken, daß durch die Kraft S tang η die Unterlage auf den Walzen nicht fortgeschoben wird. Es ist also eine nothwendige Bedingung, daß $\lambda S > S \text{ tang } \eta$, oder $\text{tang } \eta < \lambda$ sey.

Setzt man daher $lE = h$, so darf Gl wenigstens nicht größer als λh, folglich EG nicht größer als $h\sqrt{(1 + \lambda^2)}$ seyn; also ist die Höhe, zu der die Last hinaufrücken kann, $= EG - El = h \cdot \sqrt{(1 + \lambda^2)} - h$.

Bey einer zweyten Operation ist $El = h\sqrt{(1+\lambda^2)}$, und $EG = h(1+\lambda^2)$; bey einer dritten ist $EG = h(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$, und nach n maliger Wiederhohlung $= h(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}}$; mithin die ganze Höhe, um die alsdann die Last gestiegen ist, $= h((1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1)$.

Soll demnach die Last durch einen gegebenen Raum g gehoben werden, so hat man $h((1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} - 1) = g$, folglich:

$$(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} = 1 + \frac{g}{h}, \text{ und}$$

$$n = \frac{2\log(1+\frac{g}{h})}{\log(1+\lambda)}$$

Es betrage z. B. der Raum g ein Zehntel von h, und λ sey $= \frac{1}{3}$, so ist $\log(1+\frac{g}{h}) = 0{,}0413927$, $\log(1+\lambda^2) = 0{,}0457574$, $n = \frac{827854}{457574}$; also muß die Operation zweymal geschehen.

§. 349.

Bey der eben betrachteten Maschine, so wie in andern solchen Fällen, wo die Last nur um ein Geringes fortrücken soll, leisten die Hebelarme sehr gute Dienste; es würde aber dennoch nicht rathsam seyn, sie damit auf eine beträchtliche Weite fortzuschaffen. Man bedient sich alsdann mit größerm Vortheile der Schraube, wobey freylich das Ungemach wieder eintritt, daß sich

die Walzen aus ihrer Lage, die begreiflich immer senkrecht auf die Richtung des Zuges seyn muß, leicht verschieben, und dadurch den gleichförmigen Gang der Bewegung sehr häufig unterbrechen.

Aus diesem Grunde wurde der ungeheure Granitblock, eine Last von drey Millionen Pfunden, worauf nachher die Statue Peters des Großen errichtet worden ist, vom Finnischen Meerbusen bis nach St. Petersburg auf Kugeln transportirt. *) Da dies Unternehmen unstreitig eine der merkwürdigsten mechanischen Operationen ist, die je im Großen angestellt worden sind, so will ich das Nähere davon hier im Kurzen beyfügen:

Fig. 92. 1. Die Kugeln bestanden aus einer messingartigen Metallmischung, und hatten 5 Zoll im Durchmesser. Sie wälzten sich zwischen zweyen Riemen AA und BB fort, wovon die obere durch zwey Querbalken mit einer danebenliegenden verbunden, der Last zur Basis diente. Die Entfernung cd der Berührungspunkte betrug $3\frac{1}{2}$ Zoll.

2. Die ganze Steinmasse wurde auf diesen Kugeln durch zwey Stricke fortgezogen, an deren jedem ein dreyrolliger Flaschenzug angebracht war, von dem das Seil um die Welle einer Erdwinde ging, die zwey Fuß im Durchmesser hatte.

3. An jeder der beyden Winden befanden sich 8 Hebelarme von 8 Fuß Länge, und an jedem einzelnen

*) S. des Grafen *Carburi* monument élevé à la gloire de Pierre le Grand. Paris 1777.

Bey einer zweyten Operation
$(1+\lambda^2)$, und $EG = h(1+\lambda^2)$;
ist $EG = h(1+\lambda^2)^{\frac{2}{2}}$, und nach
derhohlung $= h(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}}$; mit
um die alsdann die Last gestiegen ist.

Soll demnach die Last durch
g gehoben werden, so hat man
$= g$, folglich:

$$(1+\lambda^2)^{\frac{n}{2}} = 1 +$$

$$n = 2 \log(1+$$

$$\log(1$$

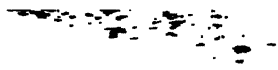
Es betrage z. B. der

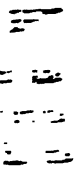
und λ sey $= \frac{1}{3}$, so ist

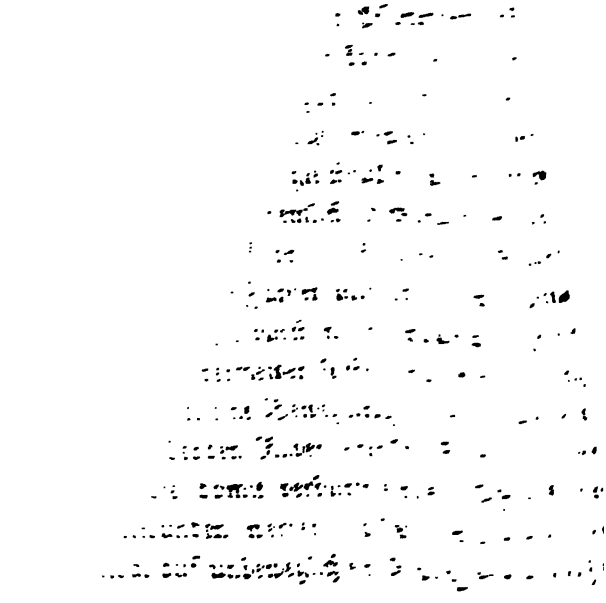
$$\log(1+\lambda^2) = 0,$$

muß die Operation zu

Bey der eber
andern solchen Tä
ges fortrücken sol
sie; es würde aber $M = \frac{P}{840}$, m
mit auf eine b $P = 30000$
bedient sich als eine Kraft,
wobey freylich







[illegible]

§ 351.

[illegible]gabe. Die [illegible]
[illegible]ng CD den Druck P; [illegible]
[illegible]uf den Hebelarm AC, [illegible]
[illegible]ch der auf ihn senkrechten [illegible]

Arme schoben 4 Leute, so d.
Menschen fortbewegt wurde.

4. Es versteht sich, d.
Strecken die Rede ist:
wohl 6 Winden gebraucht

Man setze nun

1) das Gewicht
coefficienten μ nach
ment der Friktion
der Hebelarm f hie

liche Kraft zum
Spannung jed

2) Folg

de $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14}$

ebenfalls $\frac{P}{840}$

beträgt.

3.

ter anzuwe =
des
der T
Punkt
= a

nnt nun

tion, die

ringt; also

bracht werden müſſe, damit die
und G, als auch an den Zapfen
wunden werde.

Aufl 1) Man ſetze die ge
Länge des Hebelarmes AC = l
Zapfen FC = a, den Halbmeſſ
und den ſeines Zapfen of = e;
kel FGD = η, ſo zerfällt

1) der Druck P in einen n
nach GGo, wovon jeder = $\frac{P S}{Si}$

2) Dadurch entſteht an j
die Friktion $\frac{\lambda P}{2 \operatorname{Cos} \eta}$, die das P
zur Ueberwindung an dem U
und G eine Kraft = $\frac{\lambda e P}{2r \operatorname{Co}}$

3) Der Zapfen EFG
drehung den Widerſtand =
ſeinem Umfange nach der
er daran das Moment =

4) Hierzu kommt
= $\frac{\mu P}{\operatorname{Cos} \eta}$ der Friktion
F und G hervorbringt,

$\left(\frac{ds}{dx}\right)$; alſo wird: $X = S\left(\frac{ds}{dx}\right)$, und eben ſo erhält man: $Y = S\left(\frac{ds}{dy}\right)$, $Z = S\left(\frac{ds}{dz}\right)$.

6) Bedeutet jetzt Z einen Punkt in der Richtung der Kraft S', und heißt s' die Entfernung deſſelben von D; ſo ſind auf gleiche Art $S'\left(\frac{ds'}{dx}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dy}\right)$, $S'\left(\frac{ds'}{dz}\right)$ die Kräfte, die aus der Zerlegung derſelben nach den Richtungen Da, Db und Dc entſpringen, und eben dies gilt auch für die folgenden Kräfte S'', S''' u. ſ. w.

7) Es ſey V die Kraft, die durch die Zuſammenſetzung aller der Kräfte S, S', S'' u. ſ. w. hervorgebracht wird, ſo iſt offenbar der Antheil von ihr nach der Richtung Da = der Summe aller einzelnen Kräfte, die man aus der Zerlegung von S, S' u. ſ. f. nach dieſer Richtung erhält, und ein Gleiches gilt in Anſehung der beyden andern Richtungen Db und Dc; nennt man alſo u eben das für V, was bey den gegebenen Kräften s, s', s'' u. ſ. f. hieß, ſo wird:

$$V\left(\frac{du}{dx}\right) = S\left(\frac{ds}{dx}\right) + S'\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

oder $Vdx.\left(\frac{du}{dx}\right) = Sdx\left(\frac{ds}{dx}\right) + S'dx\left(\frac{ds'}{dx}\right) + \text{u. ſ. w.}$

und eben ſo:

$$Vdy\left(\frac{du}{dy}\right) = Sdy\left(\frac{ds}{dy}\right) + S'dy\left(\frac{ds'}{dy}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

$$Vdz\left(\frac{du}{dz}\right) = Sdz\left(\frac{ds}{dz}\right) + S'dz\left(\frac{ds'}{dz}\right) + \text{u. ſ. w.}$$

$\left(\frac{ds}{dx}\right)$; alſo wird: $X = S($

man: $Y = S\left(\frac{ds}{dy}\right)$, $Z =$

6) Bedeutet jetzt Z ei
der Kraft S', und heißt s' d
D; ſo ſind auf gleiche Art S
die Kräfte, die aus der Z
Richtungen Da, Db und D
gilt auch für die folgenden F

7) Es ſey V die Kraf
ſetzung aller der Kräfte S, S
wird, ſo iſt offenbar der An
tung Da = der Summe
man aus der Zerlegung v
Richtung erhält, und ein E
beyden andern Richtungen
alſo u eben das für V, was
s, s', s'' u. ſ. f. hieß, ſo wi

$$V\left(\frac{du}{dx}\right) = S\left(\frac{ds}{dx}\right) +$$

oder $Vdx \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) = Sdx ($

und eben ſo:

$$Vdy\left(\frac{du}{dy}\right) = Sdy\left(\frac{d}{d}\right.$$

$$Vdz\left(\frac{du}{dz}\right) = Sdz\left(\frac{ds}{dz}\right.$$

auf ein System von mehrern Punkten m, m', m'' u. s. f., die durch feste gerade Linien gegenseitig mit einander verbunden sind, nach beliebigen Richtungen wirken, und sich daran im Gleichgewichte erhalten; so ist wieder für eine unendlich kleine Aenderung in der Lage des ganzen Systems, wobey die Kräfte nach ihren Richtungen die Wege ds, ds', ds'' u. s. f. durchlaufen:

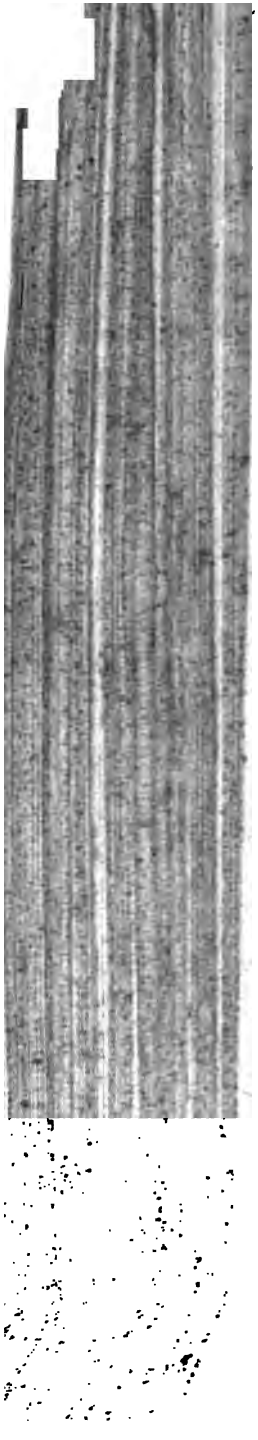
$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = o.$$

Beweis. 1) Wir wollen bloß setzen, das System bestehe aus den drey Punkten m, m', m''. Auf den Punkt m sey die Kraft S, auf m', S' und auf m'', S'' angebracht; dabey sey die Entfernung zwischen m und m' = f, zwischen m und m'' = f', und zwischen m' und m'' = f''.

2) Was nun zuvörderst den Punkt m betrifft, so ist klar, daß die Kräfte S', S'' nicht anders als von m' und m'' aus auf ihn wirken können; setzt man daher den gegenseitigen Druck, den die Punkte m und m' auf einander ausüben, = R, und den zwischen m und m'' = R', so sind am Punkte m die Kräfte S, R und R' für sich im Gleichgewichte; man hat also:

$$Sds + Rdf + R'df' = o.$$

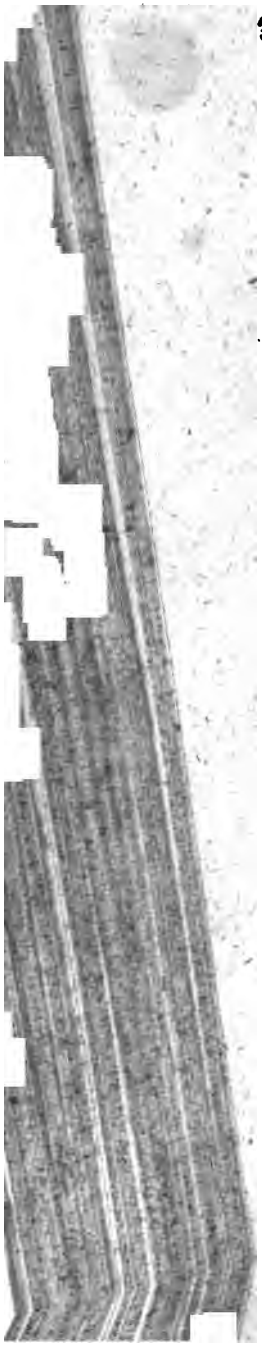
3) Setzt man ferner die gegenseitige Wirkung der Punkte m' und m'' aufeinander = R'', so sind S', R und R'' die Kräfte, die am Punkte m' unter sich im Gleichgewichte stehen, und da dieser Punkt, wegen seiner unveränderlichen Distanz von m, dem Punkte m nach m'm folgen muß, so ist der Weg, den hier die



gens; mithin bleibt daher
folglich = o. Daher
Sds + S'ds' + u. s. w.,
der Fläche keine Aender
hervorbringt.

Fig. 95. Exempel. [illegible]
pers, dessen Gewicht [illegible]
Fläche AC, die [illegible]
Winkel ACB [illegible]
Kraft V nach [illegible]
CB den Winkel
werden muß, [illegible]

Man setze, [illegible]
durch den [illegible]
wenn man [illegible]
zieht [illegible] §.
[illegible]
D[illegible] für
[illegible] §.
[illegible] gewicht.
[illegible] die Kraf
[illegible] ds,
[illegible] und n
[illegible] Gänge nennt
[illegible] die Last a
[illegible] ihre Richtun



Kraft R nach ihrer Richtung mm' durchlä

folglich:

$$S'ds' - Rdf + R''df'' = 0.$$

4) Endlich sind S'', R' und R'' i
sich am Punkte m'' das Gleichgewicht h
derselbe sowohl nach m''m, als nach m
viel zurückweichen muß, als die Punkt
diesen Richtungen fortrücken, so hat n

$$S''ds'' - R'df' - R''df'' =$$

5) Alle drey Gleichungen zus
ben demnach:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' =$$

6) Man sieht übrigens leich
ganz auf dieselbe Art führen la
aus mehr als dreyen Punkten b

§. 35

Exempel für 3

An der Schraube (§. 2
mittelst eines Hebelarmes,
Last S' das Gleichgewicht.
Man setze, die Kra
Spindet den Bogen ds
um den Winkel $\frac{ds}{f}$, un
die Höhe ihrer Gänge
so viel steigt also die
wegung gegen ihre

woraus erhellet, daß die Kraft S'' sammt ihrer Richtung aus der Zusammensetzung der Kräfte S und S' entspringt.

II. Derselbe Hebel ruhe bey C auf einem Zapfen, dessen Halbmesser = e; man sucht das Verhältniß der Kräfte S und S' zu einander, wenn erstere zugleich die Friktion überwinden soll.

Man lasse, wie I. (1), den Hebel nach A zu sich um den Winkel $d\varphi$ drehen, so beschreibt der Widerstand $\lambda S''$, den das Reiben verursacht, um C den Bogen $ed\varphi$, und zwar gegen seine Richtung; es entsteht also die Gleichung:

$$Sad\varphi \sin\alpha - S'bd\varphi \sin\beta - \lambda S''ed\varphi = 0$$

woraus $Sa \sin\alpha = S''b \sin\beta + \lambda S''e$ wird.

Ist der Hebel geradlinigt, und sind die Richtungen der beyden Kräfte auf ihn senkrecht, so ist der Winkel $\eta + \vartheta$, den sie zusammen einschließen, = 0; also $S''^2 = S^2 + 2SS' + S'^2$, oder $S'' = S + S'$; ferner ist $\alpha = \beta = 90^\circ$, folglich erhält man:

$$Sa = S'b + \lambda e(S + S')$$

$$\text{und } S = \frac{(b + \lambda e)S'}{a - \lambda e}.$$

§. 358.

Exempel für mehrere Kräfte.

Den Schwerpunkt eines Systems von Punkten oder unendlich kleinen Massen m, m', m'' u. s. w. zu finden, die unter sich zu einem festen Körper verbunden sind.

so ist der Raum, den die Kraft S t
= Aa Cos η = dw Cos η, und den
Bl = dw Cos ϑ, folglich:

Sdw Cos η + S'dw Cos ϑ —
S'' = S Cos η + S' Cos

Fig. 97. 3) Man lasse ferner den He
lung Ap um das Stück Aα = dw
fälle aus β und γ, worin die Punk
diese Bewegung gelangt sind, auf B
pendikel βl und γo, so hat die K
Richtung den Weg Bl = Bβ Cos
Cos (η + ϑ), und S'' gegen ihre L
Co = Cγ Cos η = dw' Cos η
hin wird:

Sdw' + S'dw' Cos (η + ϑ) —
folglich:

S'' Cos η = S + S' Cos (η

4) Auf gleiche Art erhält ma
Hebel längs Bq sich bewegen läßt:

S'' Cos ϑ = S' + S Cos (η

5) Multiplicirt man die Glei
η, und zieht sie dann vor der Gl
bleibt:

o = S Sin η² — S' Si
oder S Sin η = S' Sin ϑ

6) Und, wenn die Gleichung
S' multiplicirt, und dann addirt m

S'' (S Cos η + S' Cos ϑ) =
(η + ϑ) + S'²;

Fig. 15. Man setze, der ganze Körper wer
Vertikale um ds gehoben, so durchlaufen
Punkte Z, Z' u. s. w. diesen Raum gegen
ihrer Schwere, und die Kraft S, die auf
punkt G vertikal aufwärts angebracht
durchläuft eben den Raum nach ihrer
wird also:

$$Sds = mds + m'ds + \ldots =$$

folglich: $S = m + m' + m'' + \ldots$

Man fälle ferner aus den einzel
Systems Z, Z' u. s. f. auf die horizon
die Perpendikel ZY, Z'Y' u. s. w., so
gewicht zwischen der Kraft S und
m' ... nicht angehoben, wenn m
Punkte Y, Y' ... so wie die Kraf
F verlegt.

Jetzt lasse man die Ebene A
nach C zu den Winkel $d\Phi$ besch
das Gewicht m am Punkte Y ge
Bogen. $OX \cdot d\Phi = xd\Phi$; das
gen $x'd\Phi$ u. s. w.; und die Kra
ihrer Richtung den Bogen OD
hält also:

$$Sad\Phi = mxd\Phi + m$$

$$Sa = mx + m'x'$$

folglich $a = \frac{mx + m'x}{m + m'}$

Auf gleiche Art wer
dinaten des Punktes G b

menes ds den Werth von dt' bestimmen, welches auf folgende Art geschieht:

Indem die Kraft S nach ihrer Richtung ES um ds fortrückt, dreht sich das Rad AEF um den Winkel $\frac{ds}{EC} = \frac{ds}{f}$; also beschreibt der Punkt O den Bogen $DO \cdot \frac{ds}{f} = \frac{f''ds}{f}$, folglich das Rad OGB um D den Winkel $\frac{f''ds}{fg}$, und der Punkt g den Bogen $Dg \cdot \frac{f''ds}{fg} = \frac{f''g''ds}{fg}$. Da nun die Kraft S' diesen Weg gegen ihre Richtung gs zurücklegt, so ist hier $ds' = -\frac{f''g''}{fg} \cdot ds$, also: $Sds - \frac{S'f''g''}{fg} \cdot ds = o$, oder:

$$fg \cdot S = f''g'' \cdot S'.$$

Fig. 98. II. Die Kraft m zu bestimmen, die an den Umfang des Getriebes, oder senkrecht auf den Halbmesser CO angebracht werden muß, um die Friktion zwischen den Zähnen zu überwinden.

Man setze, die Berührung der Zähne geschehe im Punkte M des Halbmessers MC, der von der Mittelpunktslinie COD um den Winkel $MCO = \varphi$ absteht; der Druck, den sie senkrecht auf einander, oder nach der Normale MQ ausüben, sey $= N$, so wirkt die Friktion nach einer auf MO senkrechten Richtung, und ist $= \lambda N$. Rückt nun der Punkt M im Umfange des Getriebes (§. 235.) um den Bogen $Mm = ds$ fort,

Rades OGD [illegible] des auf MO [illegible]
und werde [illegible] $= M$ [illegible] $\sin mMr = M$ [illegible]
des AEF [illegible] $= \sin \frac{1}{2}\Phi$; also [illegible]
Gleichge[illegible] $= \sin \frac{1}{2}\Phi$
und [illegible] $= \sin \frac{1}{2}\Phi$
unter [illegible] $= \frac{M}{\sin MDC}$ [illegible] $= \frac{M}{\cos \frac{1}{2}\Phi}$, folglich
aufein[illegible]
[illegible] wie §. 339.

§. 3[illegible].

Es bleibt endlich noch der Fall zu betrachten übrig, [illegible] Punkte des Systems weder zu einem festen [illegible] gehören, noch gänzlich unabhängig von ein[illegible] sind, sondern mit einander durch einen Faden in Verbindung stehen. Dieser Faden kann entweder

1. zwischen ihnen in eine gerade Linie ausge[illegible]; in dem Falle ist die Distanz der Punkte [illegible], und die gegenseitige Wirkung des ei[illegible] auf den andern = der Spannung des Faden; also verhält sich hier alles so, wie im §. 255.; oder

Fig. [illegible] 2. der Faden geht nicht unmittelbar von dem einen Punkte a zum andern b in gerader Linie fort; sondern biegt sich zwischen beyden über eine Fläche ADB; alsdann findet wieder keine unmittelbare Reaktion zwischen a und b, wohl aber zwischen a und A, b und B statt. Setzt man also die Spannung des Faden aADBb = T, die Entfernung Aa = f, Bb = f', so kommt in die Gleichung für den Punkt a das Glied Tdf, und in die für b das Glied Tdf'.

Nun iſt klar, daß wenn der Punkt a nach irgend
er Seite fortgeht, der Faden allemal um df fortge-
gen, alſo das Stück Bb um eben ſo viel verkürzt
rde, mithin jedesmal df' = — df ſey; daher heben
) bey der Addition der Gleichungen für die einzelnen
unkte (§. 355.) die beyden Glieder Tdf und Tdf'
nfalls einander auf, und man erhält auch für dieſen
ll wieder die Endgleichung:

$$Sds + S'ds' + S''ds'' + \ldots = o.$$

§. 362.

Exempel.

An der Winde (§. 206.) ſey die Kraft V mit der
ſt P im Gleichgewichte.

50. Indem die Welle ſich um den Winkel $d\varphi$
eht, beſchreibt die Kraft V am Hebelarme AF den
ogen $fd\varphi$; zugleich wickelt ſich am Theile A der
elle das Seilſtück $Rd\varphi$ auf, und vom Theile a das
tück $rd\varphi$ ab, alſo wird das von A bis a gehende
eilſtück AGga um $(R - r)\,d\varphi$, und jeder Theil
ſelben AG, ag, wenn wir beyde als parallel annehmen, um $\frac{1}{2}(R - r)\,d\varphi$ verkürzt. Da nun der
unkt p um ſo viel ſinkt, und die Laſt P um eben ſo
el ſteigt, ſo hat man:

$$Vfd\varphi - \tfrac{1}{2}P(R - r)\,d\varphi = o,$$

$$\text{oder } Vf = \tfrac{1}{2}P(R - r).$$

§. 363.

51. **Aufgabe.** Auf zweyen Kurven AMB und

5) Man ſetze die Länge des ganzen Seiles MON $= l$, die Entfernung $AO = f$, ſo wird $MO = \sqrt{[(f+X)^2 + Y^2]}$, $ON = \sqrt{[(f+x)^2 + y^2]}$, folglich:

$$l = \sqrt{[(f+X^2) + Y^2]} + \sqrt{[(f+x)^2 + y^2]}.$$

6) Iſt nun eine von den Kurven z. B. AMB beſtimmt, alſo Y durch X gegeben, ſo kann man aus voriger Gleichung Y, und vermittelſt der Gleichung (3) auch X wegſchaffen, wodurch man eine Gleichung zwiſchen x und y erhält.

§. 364.

Exempel.

Es ſey MC die Fallthür einer Zugbrücke, die durch ein Gewicht m vermittelſt eines Seiles, das über den Punkt A geht, aufgezogen wird; man ſucht die Natur der Kurve AND, worauf das Gewicht m gelegt werden muß, um die Fallthür bey jeder Lage im Gleichgewichte zu erhalten.

1) Hier liegt der Punkt M in einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer MC iſt; nennt man alſo dieſen $= a$, ſo wird $Y^2 = 2aX - X^2$,

folglich: $X^2 + Y^2 = 2aX$.

2) Das Gewicht von MC ſey $= 2M$, ſo iſt der Theil, der davon auf den Endpunkt M kommt, $= M$, alſo

$$MX + mx = C$$

$$\text{und } X = \frac{C - mx}{M}.$$

3) Da ferner $f = o$ ist, so wird

$$1 = \sqrt{(X^2 + Y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$
$$= \sqrt{2aX} + \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad (1)$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2aC - 2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad (2).$$

4) Weil für $x = o$, auch $y = o$ ist, so erhält man aus dieser Gleichung $1 = \sqrt{\frac{2aC}{M}}$, folglich

$$1 = \sqrt{\left(1^2 - \frac{2amx}{M}\right)} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und wenn man $\frac{m}{M} = \varkappa$ setzt, und beyde Seiten quadirt:

$$1^2 = 1^2 - 2\varkappa ax + x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot \sqrt{(1^2 - 2\varkappa ax)}$$

oder $2\varkappa ax = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot [1 - \sqrt{(x^2 + y^2)}]$

$$= 2l\sqrt{(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2).$$

Anmerk. Die eben gefundene Gleichung gehört zu einer Epicycloide, die durch Fortwälzung eines Kreises über einen andern von gleichem Halbmesser hervorgebracht wird; wie Joh. Bernoulli in den Actis Lipsi. 1695 pag. 60. zuerst gezeigt hat. Eine sehr elegante analytische Auflösung des gegenwärtigen Problems von Herrn Prof. Fuß findet man in den Actis acad. Petropol. 1790. pag. 197 u. f.

§. 365.

Wenn überhaupt mehrere Gewichte m, m′, m″ u. s. f. auf irgend eine Art mit einander im Gleichgewichte sind, und man läßt x, x′, x″ u. s. f. ihre Distanzen von einer horizontalen Ebene bedeuten, so hat man die Gleichung

$$mdx + m'dx' + m''dx'' + .. = o$$

die ſich auch ſo ausdrücken läßt:

$$d(mx + m'x' + m''x'' + ..) = o.$$

Setzt man nun die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunktes aller dieſer Gewichte von derſelben Ebene $= u$, ſo iſt

$$u = \frac{mx + m'x' + m''x'' + ..}{m + m' + m'' + ..} \quad (\S. 74.)$$

$$\text{folglich } du = \frac{d(mx + m'x' + m''x'' + ..)}{m + m' + m'' + ...} = o.$$

Daher iſt u für den Fall des Gleichgewichts entweder ein Maximum oder ein Minimum, woraus der allgemeine Satz folgt: **daß der gemeinſchaftliche Schwerpunkt mehrerer Gewichte für den Fall, wo ſie mit einander im Gleichgewichte ſind, entweder am höchſten oder am tiefſten liege.**

§. 366.

Fig. 40. Wenn alſo z. B. ein Gewicht P an einen Faden AGB, der bey A und B befeſtigt iſt, vermittelſt eines Ringes aufgehängt wird, ſo wird es ſich mit der Spannung des Faden nicht eher ins Gleichgewicht ſetzen, als bis es die möglichſt tiefſte Schnelle erreicht hat. Setzt man nemlich ſeine Entfernung EG von der Horizontale AD $= u$, ſo erhält man, da die Kräfte, die ihm Widerſtand leiſten, von unbeweglichen Punkten herrühren, $Pdu = o$; mithin iſt u für den Fall des Gleichgewichtes ein Maximum.

Es ſey nun $AE = x$, $AD = a$, $BD = b$, die Länge des Seiles $= l$, ſo wird $ED = a - x = GB \sin BOD$, und $b + u = GB \cos BOD$,

alſo $(a - x)^2 + (b + u)^2 = GB^2 = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}]^2$.

Man differenziire dieſe Gleichung nach x, indem man u als beſtändig annimmt, ſo erhält man:

$$a - x = [l - \sqrt{(x^2 + u^2)}] \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}$$

$$a = \frac{xl}{\sqrt{(x^2 + u^2)}}, \text{ woraus}$$

$u = x\sqrt{(l^2 - a^2)}$ wird, welches eben die Gleichung iſt, die wir §. 176. gefunden haben.

Druckfehler im erſten Theile.

S. 63. Z. 15. ſtatt $\int Yxd$, l. $\int Ydx$

— 85. — 10. ſt. Bülfinger, l. Leutmann.

— 104. — 1. von unten ſt. — i, l. = i

— 111. — 11. ſt. Aepinus, l. Kraft

— 121. — 7. von unten ſt. daneben l. den eben

— 146. — 8. v. u. ſt. $\frac{1}{2}ds$, l. $\frac{1}{2}qds$

— 155. — 6. v. u. ſt. allemal, l. alle

— 164. — 5. v. u. ſt. ds^2, l. d^2s

— 177. — 9. v. u. ſt. $r + 70$, l. $r \cdot 70$.

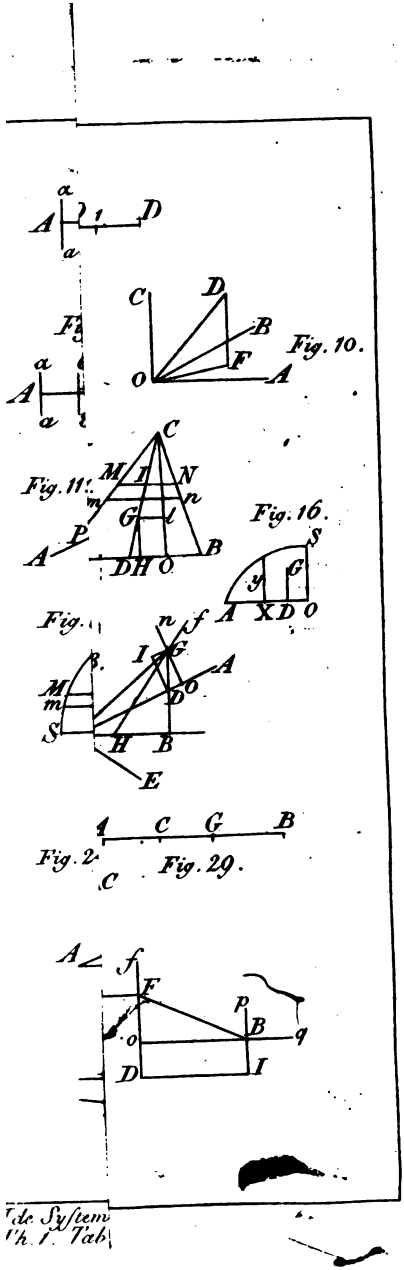
— 230. — 2. ſt. vielförmige, l. keilförmige

— 288. — 14. ſt. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a$, l. $- \frac{1}{6}\xi\lambda a^2$

— 281. — 11. ſt. $\frac{P'a'}{c'}$, l. $\frac{P'a'}{c'^2}$

— 309. — 4. v. u. ſt. P, l. p

— 341. — 15. 16. 17. und 1. v. u. ſt. S, l. s



de System
Ch. 1. Tab

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R L

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building